Universidade de Lisboa

A aprendizagem da Trigonometria no 9.º ano de escolaridade através da diversidade de tarefas

Débora Tomé Ferrage

Mestrado em Ensino de Matemática

Relatório de Prática de Ensino Supervisionada
orientado pela
Professora Doutora Hélia Margarida Aparício Pintão de Oliveira
e coorientado pela
Professora Doutora Maria da Purificação Antunes Coelho

2019

RESUMO

Este relatório resulta da minha intervenção numa turma de 9.º ano de escolaridade do Colégio Militar, no 2.º período do ano letivo 2018/2019, com a lecionação de 11 aulas num total de 23 tempos de 45 minutos. Nesse contexto, realizei um estudo em que procurei compreender as aprendizagens que os alunos realizaram no tema Trigonometria, a partir da resolução de tarefas diversificadas.

Para desenvolver este estudo, utilizei dois métodos de recolha de dados: a observação participante, onde recorri às notas de campo e à gravação vídeo das aulas; e à recolha documental das resoluções escritas dos alunos das diversas tarefas propostas.

Considerando a problemática definida e a turma em causa, optei por uma abordagem de ensino exploratório, onde as aulas estiveram centradas, essencialmente, na atividade dos alunos, sendo também promovidas discussões coletivas, através da proposta de tarefas de natureza exploratória, onde também foi utilizado o Geogebra. Procurei, na minha intervenção, uma diversificação das propostas de trabalho ao longo das aulas, tendo sido apresentados, para além das tarefas de exploração, exercícios, problemas e demonstrações.

O reconhecimento da definição das razões trigonométricas ou ainda a relação entre estas, segundo os resultados do estudo, foram os tópicos onde os alunos evidenciaram mais sucesso. O Geogebra mostrou-se útil na compreensão da invariância nas razões trigonométricas. Já a relação entre o seno e cosseno de ângulos complementares, o reconhecimento dos valores exatos de ângulos de referência e do intervalo de variação das razões trigonométricas foram tópicos menos bem conseguidos. Atividades como a resolução de problemas não representam uma dificuldade para os alunos, no entanto, o mesmo não acontece com a demonstração. A manipulação do cálculo algébrico e numérico, foram dificuldades transversais a qualquer tarefa.

A diversidade de tarefas mostra-se como uma mais-valia na lecionação da Matemática, dados os resultados que se observaram.

Palavras-chave: tarefas matemáticas; trigonometria; aprendizagem; 9.º ano.

ABSTRACT

This report results from my intervention in a Colégio Militar's 9th-grade class, in the 2nd trimester of the school year 2018/2019, with the teaching of 11 classes souwith a total of 23 times of 45minutes. In this context, I carried out a study in which I tried to understand the student's learning in Trigonometry, from the resolution of diversified tasks.

The study was developed using two methods of data collection: participant observation, supported by field notes and video recording of classes; and documentary collection of the student's written resolutions of the various tasks proposed.

Given the defined problem and the considered class, an exploratory teaching approach was chosen, centralizing the classes in the student activity, promoting group discussions through performing several types of tasks (exploration tasks, exercises, problems, and demonstrations), using the aid of GeoGebra. In my speech, I sought diversification of the work proposals throughout the classes, presenting, in addition to the exploration tasks, exercises, problems, and demonstrations.

Recognition of the definition of trigonometric ratios or the relation between them, according to the results of the study, were the topics in which the students showed more success. GeoGebra has proved to be useful for understanding the invariance in trigonometric ratios. The relation between the sine and cosine of complementary angles, the recognition of exact values of notable angles, and the range of variation of trigonometric ratios were less successful topics. Activities such as problem-solving do not pose a difficulty for students; however, the same does not happen with demonstrations. Manipulation of algebraic and numerical calculus were crosswise difficulties to any task.

The results showed that the tasks'diversity is an added value in the teaching of Mathematics.

Keywords: mathematical tasks; trigonometry; learning; 9th grade.

AGRADECIMENTOS

Quero começar por agradecer à Professora Doutora Hélia Oliveira, pela disponibilidade e atenção com que sempre me tratou, contribuindo com comentários e sugestões que enriqueceram, não só este relatório, mas toda esta caminhada que agora começo enquanto professora.

Agradeço também à Professora Doutora Purificação Coelho pelas suas imprescindíveis correções matemáticas (e também de português) neste relatório.

Agradeço ao Colégio Militar que nos deu a oportunidade de poder estagiar e participar em todas as atividades colegiais, e aos professores desta instituição que muito nos apoiaram.

Um agradecimento muito especial à Professora Anabela Candeias pela generosidade com que nos acolheu e nos integrou na sua vida profissional, sempre com uma abertura de espírito que possibilitou a experimentação de diversas situações.

À minha colega de estágio, Joana Dias, com quem formei uma dupla pedagógica ímpar, tendo a certeza de que nunca conseguiria realizar o trabalho que fizemos, estando sozinha.

A todos os alunos que me permitiram assistir e participar das suas aulas, em especial, à minha turma, que sempre mostrou uma motivação, empenho e espírito de união únicos, que me muito me marcaram.

A todas as pessoas da minha vida, que não irei nomear para não correr o risco de ser injusta, mas que contribuíram para que de uma forma ou de outra, eu pudesse estar neste momento, aqui.

E um agradecimento final, e o mais importante de todos, à minha família por todo o apoio e motivação. À minha prima e ao meu irmão que me ajudaram na fase final deste relatório, lendo e fazendo sugestões de correções. E ao meu irmão e à minha mãe que são as pessoas mais importantes da minha vida, e a quem devo tudo o que sou e tenho!

Muito Obrigada!

Índice

Índice de figuras

Índice de tabelas

Índice de anexos

Capítulo 1 : Introdução

Neste primeiro capítulo pretendo apresentar as motivações para a realização deste estudo, bem como a pertinência do mesmo, apoiando-me em alguma literatura acerca do ensino da Matemática. Apresento, seguidamente, o objetivo do estudo, acompanhando-o das questões de investigação.

1.1. Motivações e pertinência do estudo

O tópico matemático em que se baseia o meu Relatório de Prática de Ensino Supervisionada (RPES) é a Trigonometria que é abordada no 9.º ano do 3.º ciclo do Ensino Básico (EB). A escolha deste tópico prende-se com a planificação anual definida para o 9.º ano de escolaridade na escola onde realizei a minha intervenção.

O ensino da Matemática contempla diversas finalidades, e, portanto, para que estas possam ser atingidas é necessário existir uma variedade de tarefas que, quando adequadamente concebidas, irão permitir alcançar os objetivos pretendidos. De forma geral, Swan (2017) aponta quatro grandes finalidades com o ensino da Matemática: o conhecimento factual e fluência processual; a compreensão concetual; a competência estratégica e a competência crítica. Por sua vez, se nos debruçarmos sobre o Programa do Ensino Básico de Matemática (MEC, 2013), observamos que as finalidades estabelecidas são a estruturação do pensamento, a análise do mundo natural e ainda a interpretação da sociedade. Ainda neste mesmo documento são indicados outros pontos que são considerados por MEC (2013) como objetivos a atingir com a lecionação da disciplina, são eles: conhecimento de factos e procedimentos, raciocínio matemático, comunicação matemática, resolução de problemas e olhar para a Matemática como um todo coerente. Pretende-se, assim, que os alunos aliem o conhecimento (*saber*) com a habilidade/capacidade (*saber-fazer*).

Para além do *saber* e do *saber-fazer*, é necessário que os alunos desenvolvam, igualmente, o *saber-estar*, isto é, as atitudes. Algumas das atitudes que são desejáveis promover na aula de Matemática são, por exemplo, a comunicação, a lógica, a intuição e espírito crítico. Como refere Skovsmose (2000), é através da multiplicidade de tarefas que se pode almejar o desenvolvimento destas (e outras) importantes atitudes.

Assim, é pelo desenvolvimento constante desta tríade (conhecimentos, capacidades e atitudes) que os alunos se tornarão matematicamente competentes (Martins et al, 2017).

Há ainda um outro aspeto que serve para fundamentar a pluralidade de tarefas: a diversidade de alunos que cada turma apresenta. Como nos diz Ponte (2005), esta diversidade reflete-se em diferentes interesses e necessidades que deverão ser tidos em conta pelo professor aquando a planificação de uma qualquer aula ou Unidade Didática.

Do ponto de vista pessoal, enquanto aluna, foram raras as vezes onde me apercebi da realização de outras tarefas que não exercícios, na aula de Matemática. Os problemas ou tarefas de investigação eram deixados para os alunos que gostavam de participar nas Olimpíadas da Matemática ou no Canguru Matemático – atividades de caráter opcional. O que é uma pena, porque essa cultura pedagógica cria uma perceção de que a Matemática é elitista, ou seja, que só está ao alcance de quem a consegue aprender como ela é ensinada na escola. Creio que o professor desempenha um importante papel na forma como a Matemática é perspetivada pelos seus alunos, tendo por obrigação mostrar-lhes que todos conseguem fazer Matemática, sendo a sua postura, esforço e trabalho condições *sine qua non* para o sucesso na disciplina. Esta ideia de que só os melhores alunos são capazes de realizar tarefas mais complexas ainda assombra a cabeça de muitos estudantes e reflete-se na sua forma de estar perante a Matemática.

É, então, desejável que se trabalhem diferentes tipos de tarefas de forma a respeitar a heterogeneidade da turma, sendo necessário que o professor crie oportunidades para que isso ocorra. Foi isto que tentei concretizar na lecionação desta Unidade Didática: explorar diferentes tipos de tarefas. Creio que isto permitiu uma melhor aproximação a todos os alunos e às suas dificuldades, bem como às finalidades estabelecidas para o ensino da disciplina, maximizando as aprendizagens daí decorrentes, e quem sabe, até despertar o gosto pelo aprender e pelo fazer Matemática.

1.2. Objetivo e questões de investigação

O meu RPES resulta da intervenção numa turma de 9.º ano de escolaridade do Colégio Militar, no decorrer do ano letivo 2018/2019 e procura compreender as aprendizagens que os alunos realizam no que diz respeito aos tópicos de

Trigonometria, a partir da resolução de tarefas diversificadas. Pretende-se responder às seguintes questões:

i. Que conhecimentos revelam os alunos dos tópicos de Trigonometria?
ii. Como mobilizam os alunos os seus conhecimentos de Trigonometria na resolução de diferentes tipos de tarefas?
iii. Qual o contributo dos diferentes tipos de tarefas para a aprendizagem dos tópicos de Trigonometria?

A Unidade Didática no contexto da qual o estudo foi desenvolvido decorreu no 2.º período do ano letivo, num total de 11 aulas que correspondem a 23 tempos de 45 minutos.

Na lecionação da Unidade Didática escolhi fazer uma abordagem de ensino exploratório, o que significa que o processo ensino-aprendizagem é centrado no aluno, as tarefas são os meios pelos quais são introduzidos conteúdos, e as aulas dividem-se em três partes: introdução da tarefa, trabalho autónomo do aluno e discussão e sistematização dos conteúdos. Para a minha intervenção optei por propor uma diversidade de tarefas matemáticas.

Capítulo 2 : Enquadramento curricular e didático

Com este capítulo objetiva-se a apresentação de um enquadramento literário para o presente estudo. Inicia-se com a explicitação das finalidades do ensino da Matemática, seguidamente, apresentam-se os diversos tipos de tarefa que podem ser propostas aos alunos e relacionam-se as diversas finalidades e tarefas na secção subsequente. É ainda feita uma abordagem acerca da lecionação dos tópicos de Trigonometria e a simbologia matemática associada. Termina-se o capítulo com uma secção dedicada aos estudos realizados no âmbito da Trigonometria e que me auxiliaram na construção deste relatório.

2.1. Finalidades do ensino da Matemática

A palavra Matemática deriva da palavra grega *mathematikos*, que resulta da aglutinação de duas outras palavras: *máthema*, que significa conhecimento, ciência, aprendizagem e *thike*, que significa arte.

A etimologia da palavra permite-nos entender que o termo que utilizamos para identificar esta área do saber é muito mais abrangente que a comum conceção que se tem sobre a mesma. A origem e compreensão deste termo refletem aquela que, a meu ver, é a essência desta ciência: a beleza (arte) advinda do reconhecimento, conferido pela lógica, de regularidades que permitem uma organização temática do próprio saber. Percebe-se, assim, que a Matemática sempre representou, e continua a representar, uma importância indiscutível para a sociedade e para a construção do conhecimento científico e, consequentemente para o conhecimento geral da humanidade, seja através das suas infindáveis aplicações ao cotidiano, seja na sua forma mais pura e abstrata. Tal como atesta Danny Glover: “Enquanto que a energia da sociedade industrial são os combustíveis fosseis — petróleo, carvão, gás, etc. — a energia da sociedade do conhecimento é a Matemática. Para criarmos conhecimento, queimamos matemática” (citado em Figueiral, Martins, Guimarães & Abreu, 2013, p.70).

Chegamos, então, ao primeiro argumento para fundamentar o porquê de se ensinar Matemática. Este é um argumento de ordem *instrumental*, já que se prende com as aplicações que a Matemática apresenta em diversas áreas do saber e, portanto, também no cotidiano. Esta presença em múltiplas ciências, confere à Matemática um valor e, ao mesmo tempo, um peso para a escolha de percursos profissionais, por parte dos alunos, por exemplo. Assim, a Matemática deverá ser percecionada pelos alunos com a abrangência e profundidade que lhe são características. Este é um aspeto muito evidente no programa da disciplina tanto do Ensino Básico como do Ensino Secundário (MEC, 2013;2014), onde lhe são dedicados dois dos pontos indicados como as finalidades principais do ensino da Matemática: a análise do mundo natural e a interpretação da sociedade. Nota-se uma intencionalidade de destacar a aplicabilidade e transversalidade desta ciência, não reduzindo a sua utilidade ao dia-a-dia, olhando, sim, para todo o alcance e domínio que esta exerce como uma ciência basilar no desenvolvimento científico e tecnológico.

Permitir que os alunos contactem com este legado que foi e está continuamente a ser construído constitui-se como o argumento *cultural* para a integração da Matemática na formação académica dos alunos:

> A razão primordial para se proporcionar uma educação matemática prolongada a todas as crianças e jovens é de natureza cultural, associada ao facto da matemática constituir uma significativa herança cultural da humanidade e um modo de pensar e de aceder ao conhecimento. (ME, 2001, p.58)

Este é um ponto que também aparece mencionado no programa (MEC, 2013) quando se refere que a disciplina deverá ser vista como um "todo coerente" (p.5), ou seja, objetiva-se que os alunos entendam a articulação entre os diversos tópicos matemáticos, e que, ao mesmo tempo, compreendam como foi edificada esta área do saber, isto é, conheçam um pouco da história da Matemática.

Outro tipo de argumento que fundamenta a formação matemática dos alunos é o *formativo*. Este é o mais comum: porque é que estamos a ensinar esta matéria? Porque queremos que os nossos alunos aprendam esta ciência! Queremos alfabetizar matematicamente as crianças e jovens, dar-lhes literacia matemática, ou como designa Skovsmose (2000), *materacia* que "não se refere apenas às habilidades matemáticas, mas também à competência de interpretar e agir numa situação social e política estruturada pela matemática." (p.67). Assim, pretende-se que os alunos no decorrer do processo ensino-aprendizagem adquiram e desenvolvam conhecimentos, capacidades e atitudes.

Quando aqui se refere *conhecimentos*, quer-se com isto dizer que são objetos através das quais os alunos se familiarizarem com a linguagem que a Matemática é, ou seja, pretende-se que os alunos conheçam e se apropriem da simbologia, dos conceitos e das relações entre eles, da terminologia, das notações e das regras e procedimentos em causa. Para que isso ocorra é necessário, segundo Swan (2017), desenvolver o conhecimento factual e a fluência processual e a compreensão concetual. O quadro abaixo (Quadro 2.1.) sistematiza estes conceitos.

Quadro 2.1: *Conhecimento factual, fluência processual e compreensão concetual (adaptado de Swan, 2017)*

	O que é?	*O que se obtém? (Fins)*	*Como se obtém? (Meios)*
Conhecimento factual e fluência processual	Capacidade de executar rapidamente, eficazmente e com confiança procedimentos matemáticos, sem esforço de raciocínio. O facto de os alunos dominarem bem a fluência liberta a sua atenção para se focarem em aspetos que serão novos ou problemáticos.	Desempenhos, ensaios e práticas de exercícios.	Praticar através de exercícios e estudos que proporcionem repetição do uso de procedimentos bem definidos. Usar e memorizar de forma sistemática termos e notações.
Compreensão concetual	Conceitos são a tentativa do indivíduo para que o mundo faça sentido. Quando compreendemos algo, isso torna-se parte de nós, passamos a possuí-lo. Quando compreendemos algo, somos capazes de representá-lo de uma variedade de maneiras: verbal, visual e/ou simbolicamente.	Descrições, classificações, representações, justificações e análises estruturais.	Observar, classificar e definir estruturas e objetos matemáticos. Representar e traduzir entre conceitos matemáticos e as suas representações. Justificar e/ ou demonstrar conjeturas, conexões e procedimentos matemáticos. Identificar e analisar a estrutura dentro de situações.

O programa da disciplina (MEC, 2013) também aponta que a apropriação por parte dos alunos dos conceitos matemáticos e das técnicas e procedimentos inerentes aos mesmos é um aspeto de extrema relevância, porque só quando tal acontece é que os alunos conseguirão realizar trabalhos mais complexos e aprender conceitos mais elaborados, sendo os mais elementares os alicerces para estes últimos. Isto resume-se à muito popular frase que é ouvida com muita frequência quando se pergunta a razão pela qual um determinado aluno evidencia imensas dificuldades na Matemática, que é respondida com um "não tem bases".

As capacidades estão intimamente ligadas com os conhecimentos, caminhando ambos a par e passo (Martins et al, 2017). À medida que os alunos se vão inteirando da linguagem que é a Matemática vão desenvolvendo e adquirindo *capacidades* como a lógica, a intuição, a interpretação, a reflexão, a argumentação, a comunicação, a generalização, a abstração e a resolução de problemas. No entanto, também precisam destas capacidades para conseguirem adquirir os conhecimentos, sendo a sua mobilização conjunta que torna o aluno matematicamente competente (Martins et al, 2017). Para Swan (2017), o desenvolvimento da competência estratégica e da competência crítica são essenciais no processo ensino-aprendizagem da Matemática.

Consultando o programa de Matemática do 3.º ciclo do EB (MEC, 2013) surge em grande destaque a resolução de problemas como sendo um dos objetivos do ensino da matemática escolar, donde se salienta a importância deste aspeto para o adequado desenvolvimento das competências matemáticas dos alunos. Swan (2017), por sua vez, considera que devem ser propostos problemas não rotineiros, isto é, problemas cuja resolução não seja um processo mecanizado ou algorítmico ou relativo a um assunto que acabou de ser tratado. No que diz respeito à competência crítica, um documento de ordem curricular onde esta vem expressa é no Currículo Nacional do Ensino Básico (ME, 2001), onde são enunciadas expressões como "validade de uma afirmação" (p.57); "razoabilidade de um resultado" (p.57); "analisar erros cometidos" (p.57) e "sentido crítico" (p.57). Percebe-se, assim, a necessidade de os alunos analisarem criticamente aquilo que produzem e, para que isso aconteça, é necessário que se dê tempo para que exista essa reflexão. Aliás, o desenvolvimento desta capacidade reflexiva é uma preocupação que vem expressa no Perfil do Aluno (Martins et al, 2017), onde se refere que é desejável que um aluno no final da sua escolaridade obrigatória consiga "desenvolver novas ideias e soluções, de forma imaginativa e inovadora, como resultado da interação com outros ou da reflexão pessoal, aplicando-as a diferentes contextos e áreas de aprendizagem" (p. 17).

Organizemos, novamente, num quadro estes conceitos (2.2.).

Quadro 2.2: *Competência estratégica e competência crítica (adaptado de Swan, 2017)*

	O que é?	*O que se obtém? (Fins)*	*Como se obtém? (Meios)*
Competência estratégica	Capacidade dos alunos para resolver problemas não rotineiros de várias etapas, e estender essa capacidade à formulação de problemas do mundo real.	Soluções de problemas e modelos matemáticos.	Resolver um problema não rotineiro pela criação e desenvolvimento de uma cadeia de raciocínio. Formular e interpretar um modelo matemático de uma situação que pode ser adaptada e usada numa variedade de situações.
Competência crítica	Capacidade de analisar criticamente trabalhos elaborados por outros.	Comentários críticos.	Analisar e criticar a explicação matemática de um procedimento ou conceito. Analisar e criticar uma estratégia de resolução de problemas ou o modelo matemático de um fenómeno.

Finalmente, dentro do argumento formativo, resta-nos analisar as *atitudes* que os alunos podem desenvolver no decorrer do seu percurso escolar. São exemplos disso a autoconfiança, a autonomia, a colaboração, a concentração, a persistência, o rigor, o interesse, a apreciação e a valorização do conhecimento. É relevante salientar também estas competências dado que a escola não serve só preparar academicamente os alunos, deverá ser também um local onde os alunos desenvolvam o seu lado pessoal e humano, e a aula de Matemática, apesar de ser um espaço onde impera a ciência, também permite, ou deverá permitir o desenvolvimento e aperfeiçoamento pessoal, neste sentido (Martins et al, 2017).

A comunicação matemática é outro dos pontos que o programa (MEC, 2013) refere como sendo bastante importante, traduzindo essa relevância numa das finalidades do ensino da Matemática. Olhando para o Currículo Nacional do Ensino Básico (ME, 2001), é lá que encontramos uma preocupação não só com a comunicação matemática, mas também com outras atitudes, como a motivação e a autoconfiança, e onde aparece diversas vezes a referência ao gosto pela Matemática.

2.2. Diversidade de tarefas

As tarefas, como sucede em muitas áreas do saber, desempenham um papel muito importante no ensino-aprendizagem destas e, na Matemática isso não é exceção, tendo esta disciplina associadas as suas tarefas específicas (Ponte, 2003).

Autores como Ponte (2005) e Swan (2017) mencionam que uma tarefa é tudo aquilo que é proposto para que os alunos realizem e, aquilo que eles realizam ou não, é a atividade desenvolvida por eles, logo, "quando se está envolvido numa actividade, realiza-se uma certa tarefa. Uma tarefa é, assim, o objectivo da actividade" (Ponte, 2005, p.11).

Segundo Ponte (2003), "uma tarefa tem quatro dimensões básicas: O seu grau de dificuldade, a sua estrutura, o seu contexto referencial e o tempo requerido para a sua resolução. Conjugando as duas primeiras dimensões, obtemos "quatro tipos básicos de tarefa" (pp. 28-29), como podemos ver de seguida (figura 2.1.).

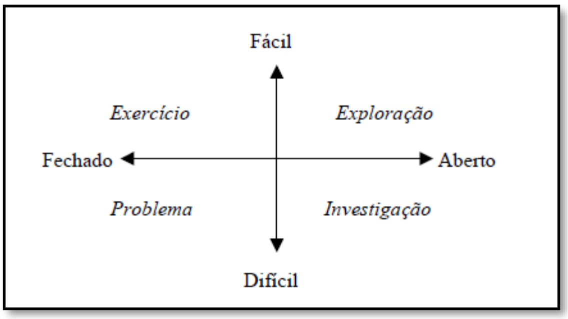


Figura 2.1: *Tipificação de tarefas segundo Ponte (2005)*

Analisando esta figura, percebe-se, por exemplo, que um exercício é uma tarefa com um grau de dificuldade baixo e com uma estrutura fechada, uma vez que apresenta uma única resposta, tendo uma pergunta bem definida e relacionada com o tema que está a ser trabalhado; em contraponto, uma investigação assume uma estrutura aberta, com um grau de dificuldade elevado, dado que existe uma multiplicidade de caminhos para a resolução da mesma, não tendo uma pergunta necessariamente bem definida à partida, pretendendo-se que os alunos formulem hipóteses e que as testem, o que lhe confere este caráter aberto. Logo, tarefas com um nível de desafio mais elevado, são aquelas que desafiam, cognitivamente, os alunos já que os põem em contacto com o *fazer* Matemática, possibilitando o desenvolvimento de atitudes como a persistência e o rigor; enquanto as de desafio mais reduzido permitem fixar rotinas e desenvolver competências como a autoconfiança. Em relação à estrutura da tarefa, as de carácter mais fechado permitem relacionar propriedades e conceitos fundamentais de forma unívoca; ao passo que as de estrutura mais aberta levam os alunos a confrontarem-se com situações mais elaboradas (à semelhança da vida real), podendo ser promotoras de atitudes como a autonomia (Ponte, 2005).

Deste quadro de tipificação de tarefas, salientam-se os problemas, que apresentam uma estrutura fechada e um elevado nível de desafio. Para além de desempenhar um importantíssimo papel no ensino da Matemática (Vale, Pimentel & Barbosa, 2015), a resolução de problemas permite desenvolver esta competência por parte dos alunos, a qual é muito relevante tanto no percurso matemático do aluno, como no seu percurso pessoal, como esclarece o NCTM (2007):

> Ao aprender a resolver problemas em matemática, os alunos irão adquirir modos de pensar, hábitos de persistência e curiosidade, e confiança perante situações desconhecidas, que lhes serão muito úteis fora da aula de matemática. Na vida quotidiana e no trabalho, ser hábil na resolução de problemas poderá acarretar muitas vantagens (p.57).

Segundo Ponte (2003), se olharmos para a duração de uma tarefa, surge-nos, ainda, um outro tipo, o projeto. O projeto é uma tarefa com uma duração longa, assumindo uma estrutura aberta com um nível de dificuldade alto, distingue-se da investigação, precisamente pela morosidade associada.

Debruçando-nos sobre o contexto, conseguimos tipificar de outra forma as tarefas matemáticas. Skovsmose (2000) refere que podem ser considerados três diferentes tipos de contexto: contextos de realidade, de semi-realidade e contextos de matemática pura. Os contextos de realidade são aqueles onde nas tarefas propostas aos alunos são utilizadas situações do dia-a-dia, e que são verosímeis na vida real; contextos de matemática pura é quando utilizamos unicamente a simbologia e a linguagem matemática para formular as perguntas da tarefa; e os contextos de semi-realidade é quando são criadas situações características do cotidiano, no entanto, os dados foram inventados (ou seja não assentam numa base factual) para cumprir os propósitos da tarefa.

Até agora, todas as tarefas mencionadas podem ser partilhadas com outras áreas do saber. Contudo, há uma tarefa que pela sua especificidade só é realizada no âmbito da Matemática e que representa o rigor subjacente a esta ciência: a demonstração.

A demonstração é uma tarefa matemática que mobiliza argumentos seguindo a lógica matemática, isto é, numa determinada ordem, tendo por fim a validação de uma propriedade ou resultado (Poincaré, 2010). Muitas vezes a demonstração mais do fazer esta validação, permite compreender a razão pela qual sucede, mostrando-se como um momento de aprendizagem ímpar. Aliás, segundo De Villiers (2002), a demonstração tem vários desígnios, como são exemplo: a verificação; a explicação; a descoberta; a comunicação; o desafio intelectual e a sistematização. A verificação e a explicação já foram abordadas em cima. No que se refere à descoberta pretende-se com isto dizer que a demonstração se mostra como uma tarefa propiciadora de novos resultados, já que, por vezes, na tentativa de demonstrar um resultado, são demonstrados outros, dada a estrutura aberta desta tarefa. É fácil de entender que a demonstração exige o domínio dos argumentos matemáticos que sustentarão as afirmações utilizadas, promovendo a comunicação. O desafio intelectual prende-se com o esforço cognitivo que é necessário empreender para se poder efetuar uma demonstração. E, finalmente, aquando a realização de uma demonstração, é possível organizar, axiomaticamente falando, os resultados obtidos, alcançando-se uma hierarquização dos tópicos matemáticos envolvidos (De Villiers, 2002).

Pela sua natureza, a demonstração apresenta-se como uma boa oportunidade para que os alunos perspetivem a Matemática como uma ciência em construção, e não como um conjunto de produtos acabados (Machado & Santos, 2011), que é a forma como muitas vezes, lhes são apresentados os conteúdos matemáticos.

Tendo isto em conta, percebe-se a importância destas tarefas no ensino da Matemática. Como advogam Abrantes, Serrazina e Oliveira (1999), não se pretende que os alunos, neste nível de escolaridade, façam demonstrações ao nível de um matemático, no entanto, é necessário que os alunos entendam o que é uma propriedade/resultado, percebam o que é conjeturar, sintam a necessidade de demonstrar e realizem demonstrações mais simples, constituindo-se estes aspetos como uma "competência matemática básica" (p.32).

Diversos autores apontam a Geometria como uma área matemática oportuna para serem introduzidas e desenvolvidas as demonstrações, visto que, na Geometria os alunos recorrem mais frequentemente a representações, como as construções geométricas, verificando, com mais facilidade, a ligação entre estas e a álgebra necessária para a demonstração, tal como valida Abrantes (1999):

> As actividades investigativas em geometria conduzem rapidamente à necessidade de se lidar com diversos aspectos essenciais da natureza da própria Matemática. Formular e resolver problemas, fazer conjecturas, testá-las, validá-las ou refutá-las, procurar generalizações, comunicar

> descobertas e justificações, tornam-se processos naturais. Ao mesmo tempo, surgem oportunidades para se discutir o papel das definições e para se examinar as consequências de se adoptar uma ou outra definição, assim como para se compreender a natureza e o valor da demonstração em Matemática. (p.156)

Dado que o tópico matemático que sustenta este estudo é a Trigonometria, que se integra na Geometria e Medida de 9.º ano (GM9) – conforme Programa e Metas Curriculares (MEC, 2013) – este mostra-se um tópico oportuno para desenvolver este tipo de tarefa com os alunos. Aliás, por orientação deste mesmo documento curricular, a demonstração constitui-se como um dos “sete desempenhos” (p.3) essenciais, com o seguinte sentido “(5) Provar/Demonstrar: O aluno deve apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível” (p.4).

2.3. Finalidades para o ensino da Matemática e diversos tipos de tarefas

Distinguidas que estão as várias finalidades para o ensino da Matemática e os diferentes tipos de tarefas, cabe neste ponto compreender como cada finalidade requer uma diversificação ao nível das tarefas. Estas deverão ser adequadamente concebidas, ou seja, para além de ter em conta aspetos que tem que ver com a estrutura e linguagem da tarefa em si, é necessário, como nos indica Swan (2017), que o objetivo da aula esteja bem definido, e, conforme esse objetivo, assim deverão ser as tarefas que iremos propor aos alunos, isto é, tem de existir uma coerência entre o objetivo e o trabalho que se pretende desenvolver.

Assim, por exemplo, se na aula se pretende desenvolver a competência factual e a fluência processual, deverão ser propostas tarefas que permitam trabalhar as rotinas inerentes àquele tópico matemático, portanto, os exercícios, poderão cumprir essa função, dada a tipificação apresentada na secção anterior a esta. Se, por sua vez, se pretende desenvolver a competência estratégica, deverão ser escolhidas tarefas que permitam a resolução de problemas não rotineiros.

Quando se trata de problemas, apostar em diversos contextos também se mostra significativo uma vez que é uma “via rápida” para a reflexão, no sentido em que, se os alunos conseguirem ter acesso, no mesmo tópico matemático, a problemas com diferentes contextos, terão oportunidade de olhar para esse tópico de diferentes pontos de vista, o que os impelirá a relacioná-los, coisa que só acontece através de uma reflexão (Skovsmose, 2000). Portanto, permitir que os alunos contactem com problemas com contextos puramente matemáticos, por exemplo, estimulará a sua fluência processual (linguagem e simbologia), enquanto que problemas com contextos de realidade poderá aguçar as suas competências crítica e estratégica, já que terão de ser criativos e pensar que estratégia adotar para solucionar o problema. Para compreender o tema matemático, a ser tratado, com profundidade é necessário que se debrucem sobre ambos os contextos e que os relacionem. A acrescentar a isso, problemas com contextos reais e semi-reais permitem atender às especificidades da grande maioria dos alunos, sem perder de vista os objetivos para o ensino da Matemática, uma vez que é feita uma tentativa de aproximar a Matemática com algo que eles conhecem e/ou gostem, o que facilitará o processo de ensino-aprendizagem, como é advogado por Skovsmose (2000): "Referências à vida real parecem ser necessárias para estabelecer uma reflexão detalhada sobre a maneira como a Matemática pode estar operando enquanto parte de nossa sociedade. Um sujeito crítico, é também um sujeito reflexivo." (p.85).

Por outro lado, se aquilo que se objetiva é o desenvolvimento da compreensão concetual, tarefas de natureza mais desafiante, como as demonstrações ou os problemas, poderão ajudar a cumprir esse objetivo, uma vez que os alunos terão de olhar para o objeto matemático em tratamento, como um todo, a fim de tentar compreendê-lo da melhor forma possível (Swan, 2017).

A promoção de diversos tipos de tarefas permitirá atingir, com mais facilidade, as metas estabelecidas, tal como atestam Stein e Smith (1998):

> O efeito cumulativo, dia após dia, de exploração, na sala de aula, de diferentes tipos de tarefas conduz ao desenvolvimento de ideias implícitas nos alunos sobre a natureza da Matemática – sobre se a Matemática é algo de que eles podem pessoalmente compreender o sentido e quão longa e arduamente devem trabalhar para o conseguir (p. 269).

De forma a sistematizar e organizar as tarefas consoante a sua tipificação, apresento o quadro 2.4. Assim, quando surgir a seguinte tipificação (1); (a) já se sabe que a tarefa em causa é um exercício que promove o conhecimento factual e a fluência processual; por outro lado, se aparecer simplesmente (d), é porque a tarefa em questão é promotora da competência crítica, e assim sucessivamente. Note-se que os problemas são as únicas tarefas onde são considerados diferentes contextos dado que Swan (2017) defende que a finalidade do ensino onde estes se enquadram – competência estratégica –, deverá ser vista em contextos "puros ou aplicados" (p.67).

***Quadro 2.3**: Organização da tipificação das tarefas*

<table>
<tr><th colspan="4">Tarefas</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Tipificação segundo Ponte (2005) e Skovsmose (2000)</td><td colspan="2">Exercícios</td><td>(1)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Explorações</td><td>(2)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Investigações</td><td>(3)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Problemas</td><td>Com contexto puramente matemático</td><td>(4)</td></tr>
<tr><td>Com contexto de realidade e/ou semi-realidade</td><td>(5)</td></tr>
<tr><td colspan="3" style="display:none"></td></tr>
<tr><td rowspan="4">Tipificação segundo Swan (2017)</td><td colspan="2">Promotoras do conhecimento factual e da fluência processual</td><td>(a)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Promotoras da compreensão concetual</td><td>(b)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Promotoras da competência estratégica</td><td>(c)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Promotoras da competência crítica</td><td>(d)</td></tr>
</table>

2.4. A simbologia matemática e a aprendizagem da Trigonometria

Como já tive oportunidade de referir, a Matemática é uma linguagem, e, como tal, tem associadas as suas especificidades, como são exemplo a simbologia e notação. Para que os alunos se tornem fluentes nesta linguagem, deverão dominar estas idiossincrasias, já que, como mencionam Thompson e Rubenstein (2000), é através da comunicação, oral e escrita, que é ensinada esta ciência, sendo esta um meio para a construção de uma aprendizagem significativa.

Estas autoras defendem ainda que a linguagem matemática é trabalhada no restrito campo escolar, enquanto outras, como o Português ou o Inglês, estão constantemente a ser alvo de estímulo dada a sua presença no cotidiano dos alunos fora do contexto escola. Portanto, é perfeitamente compreensível a dificuldade que estes sentem em apropriar-se das características particulares da linguagem matemática.

Algumas das estratégias apontados por Thompson e Rubenstein (2000), como promotoras do desenvolvimento da fluência da linguagem matemática são: a introdução dos tópicos matemáticos sem, à partida, definir todos os objetos em causa, permitindo que os alunos tenham espaço para compreender as suas propriedades; a promoção da comunicação oral através, por exemplo, de apresentações dos conceitos matemáticos para a turma, e da comunicação escrita por meio de textos para a comunidade escolar; a esquematização, organização e hierarquização dos tópicos lecionados ou ainda a procura do entendimento etimológico dos conceitos matemáticos.

Veloso (1997) reconhece que esta dificuldade emergente na fluência matemática, nomeadamente no domínio da Geometria, deve-se, em grande medida, ao formalismo e à diversidade de notações existentes. Para este autor, as notações devem "caracterizar-se pela clareza e fuga à ambiguidade. Ao mesmo tempo, uma notação deve ser sugestiva do que pretende representar" (p. 35). Assim, para este autor deveriam ser considerados dois tipos de sistema de notação: um mais simplificado para utilizar na escrita corrente, eliminando, por exemplo, os parêntesis retos quando se pretende referir polígonos; e outro mais específico para utilizar numa escrita mais formal, adotando, por exemplo, a notação de $ampl\angle AOB$ para designar a amplitude de um ângulo, como forma de tornar mais clara e distinguível de outros conceitos matemáticos que recorrem a três letras maiúsculas seguidas. Tais sugestões chamam a atenção para as dificuldades que os alunos podem enfrentar ao se depararem com um programa em que proliferam notações (MEC, 2013).

Figueirinhas (2009), ainda no âmbito da Geometria, acrescenta que deve existir uma concordância entre as notações utilizadas pelos professores em sala de aula e pelos manuais escolares, de forma que estas sirvam "de apoio e não de obstáculo" (p.16). A autora sublinha que no Ensino Básico "deve haver sempre e desde o primeiro instante uma clara distinção entre um objecto e o que nele se pode medir. Se certas simplificações puderem conduzir a dificuldades futuras, então são de evitar" (p.16). Refere ainda que "o recurso a fórmulas deve estar (…) reservado aos casos em que a compreensão é manifestamente mais fácil se forem utilizadas" (p.17).

Relativamente à manipulação algébrica, este é um ponto que merece desenvolvimento não só pela forte presença da Álgebra na lecionação da Trigonometria, mas, principalmente, pelas dificuldades que foram emergindo ao longo da minha intervenção. Oliveira (2009) reforça esta ideia referindo que se destaca "a reconhecida dificuldade que a utilização do simbolismo algébrico e a manipulação algébrica representam para os alunos" (p.84).

Segundo o NCTM (2007), o pensamento algébrico é o que se desenvolve no processo de aprendizagem da Álgebra, nomeadamente, através das suas estruturas, símbolos, modelação e variáveis. Para que o pensamento algébrico seja convenientemente desenvolvido, deverão ser trabalhadas as três vertentes que o constituem: representação, raciocínio e resolução de problemas (Ponte, Branco & Matos, 2009). Importa focar a representação, que diz respeito ao simbolismo e notação usuais em Matemática visto que, esta foi a vertente do pensamento algébrico mais presente, quer a nível de lecionação, quer a nível de dificuldades manifestadas pelos alunos.

Quando é feita a transição da Aritmética para a Álgebra podem surgir uma panóplia de dificuldades, não só porque são introduzidos novos símbolos, mas também porque os símbolos já conhecidos podem assumir diferentes significados, conforme o contexto onde estão inseridos (Ponte, Branco & Matos, 2009). Um exemplo disso é o uso do sinal de igual, que até serem introduzidas as equações, traduz, simplesmente, o resultado de uma operação, mas a partir do momento em que são lecionadas as equações, este sinal passa a significar uma condição para que a igualdade se mantenha verdadeira. Também neste momento, é introduzido o sinal de equivalente, e a flutuação entre sinal de igual e de equivalente passa a ser constante, o que pode tornar a aprendizagem da significação destes símbolos mais complexa.

A introdução de letras na aprendizagem da Matemática é igualmente complicada dada a multiplicidade de funções que estas podem assumir. Tal como Ponte, Branco e Matos (2009) apontam, as letras podem expressar três diferentes significados: letra como incógnita, letra como número generalizado e letra como variável. A letra como incógnita diz respeito a um número desconhecido com o qual se efetuam operações, por exemplo, na resolução de equações. Já a letra como número generalizado refere-se a uma letra que pode tomar diversos valores, como quando se resolve uma inequação. A letra como variável serve para exprimir relações entre conjuntos, por exemplo na representação algébrica de uma função (Ponte, Branco & Matos, 2009).

Portanto, é necessário desenvolver o sentido de símbolo (Arcavi, 1994 citado em Ponte, Branco & Matos, 2009), que segundo Ponte, Branco e Matos (2009), é um elemento importante para potenciar o pensamento algébrico, constituindo-se como a "capacidade de manipular e interpretar as expressões algébricas de forma eficiente" (p.76), permitindo que os alunos se apropriem do significado dos símbolos nos diferentes contextos em que surgem.

Trabalhar o cálculo algébrico, isto é, o cálculo com expressões algébricas, permite que os alunos integram a "noção de equivalência de expressões" (Ponte, Branco e Matos, 2009, p.77) o que dirime as confusões entre a utilização do sinal de igual e a do sinal de equivalente, que muitas vezes vem substituído pelo primeiro, ou nem sequer surge nas resoluções dos alunos. Já o cálculo com expressões numéricas vai facilitar o significado do sinal de igual, distinguindo-o do sinal de aproximadamente, por exemplo. Creio que o trabalho simultâneo destes dois cálculos potenciará a clarificação na utilização dos diversos sinais, e, consequentemente, nas suas aceções.

A resolução de equações também é um aspeto que pode fazer emergir muitas dificuldades, nomeadamente na determinação de soluções. Quando os alunos resolvem equações de 2.º grau precisam atentar que a extração da raiz quadrada exige a utilização do sinal de mais ou menos ($\pm$), dado que surgem duas soluções, uma positiva e outra negativa.

Embora os alunos já desde o 7.º ano de escolaridade tenham contacto continuado com a Álgebra, o professor precisa de estar atento ao tipo de dificuldades e obstáculos que a literatura aponta e que podem persistir ao longo da sua escolaridade e, consequentemente, estarem presentes no 9.º ano quando são trabalhados outros temas, como é exemplo a Trigonometria.

2.5. Estudos realizados no âmbito do ensino da Trigonometria

Dada a falta de literatura para organizar um quadro concetual no âmbito da Trigonometria do triângulo retângulo, apresentam-se alguns estudos empíricos realizados neste domínio.

O primeiro estudo que aponto é "Investigações e tecnologias no ensino da Trigonometria: uma experiência no 3.º Ciclo" (Leitão, 2018), onde a autora apresenta o trabalho desenvolvido com uma turma do 9.º ano de escolaridade, tendo as investigações e a tecnologia um papel central.

Neste estudo a utilização de diversos recursos tecnológicos, como o *software* GeoGebra, a folha de cálculo Excel ou ainda a calculadora mostraram ser úteis na construção de uma aprendizagem significativa por parte destes alunos. O Geogebra permitiu dinamizar as atividades propostas, realizar diversas tentativas, confirmar conjeturas e observar as relações entre os comprimentos dos lados e as amplitudes dos ângulos, generalizando a invariância dos valores das razões trigonométricas de um ângulo agudo. Os alunos experimentaram algumas dificuldades no uso do *software*, dada a sua falta de experiência com o mesmo. Em relação à folha de cálculo do Excel, esta possibilitou que os alunos contactassem mais proximamente com os valores das razões trigonométricas de um ângulo agudo, nomeadamente na verificação do respetivo intervalo de variação das razões trigonométricas, na relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares e ainda na obtenção dos valores exatos dos ângulos de referência. Já a calculadora científica foi útil dado que permitiu poupar tempo na realização dos cálculos e, na resolução de problemas, a sua utilização foi essencial para as estratégias de tentativa e erro e formulação e verificação de conjeturas.

As maiores dificuldades manifestadas pelos alunos prendem-se com conhecimentos anteriores, mais propriamente na manipulação algébrica e na aplicação do Teorema de Pitágoras com mais do que uma variável. A capacidade de generalização também foi um obstáculo pelo facto de os alunos não conseguirem passar da linguagem natural para a simbólica.

São ainda destacados o facto de os alunos mostrarem uma boa capacidade de argumentação, formulação e generalização nos momentos de discussão coletiva e a utilização de uma estratégia adequada aquando a resolução de problemas. Relativamente a este último aspeto, conclui-se que os alunos quando confrontados com situações onde podem escolher fazer uma abordagem pela Trigonometria ou pelo Teorema de Pitágoras, os alunos preferem a Trigonometria.

A autora conclui que a seleção e diversificação de tarefas contribuíram para uma aprendizagem significativa.

Um outro estudo que trabalha sobre os tópicos da Trigonometria é "Aprendizagem de trigonometria de alunos do 9.º ano de escolaridade com recurso ao Geogebra" (Mendes, 2016). Este estudo procura verificar o contributo que o GeoGebra têm nas aprendizagens dos alunos na Trigonometria do triângulo retângulo.

A autora deste estudo aponta que o recurso ao GeoGebra para a realização de tarefas permitiu atenuar as dificuldades manifestadas pelos alunos, investigar e perceber regularidades e proporcionar momentos de discussão que eram úteis para consolidar conceitos e procedimentos que analiticamente eram mais difíceis de entender.

As maiores dificuldades que os alunos manifestaram foi em estabelecer conexões com conteúdos anteriormente lecionados, em fazer demonstrações de resultados, em expressar oralmente e em interpretar e fórmulas trigonométricas e a aplicação que estas têm na vida real. Relativamente à realização de demonstrações a autora refere ainda que os alunos não sentem necessidade de justificar as suas hipóteses, nem de apresentar uma demonstração para as mesmas, o que pode ser motivado pelas dificuldades que estes têm ao nível do cálculo algébrico, de mobilização de argumentos e de linguagem.

Os alunos consideraram que a utilização do *software* GeoGebra é motivador e a sua utilização torna a tarefa mais produtiva. Acrescentam, ainda, que o GeoGebra facilita nas construções geométricas, o que torna mais fácil a aprendizagem dos tópicos em questão já que permite observar com mais rapidez e sem erros (que poderiam surgir dos cálculos feitos em papel) os comprimentos dos lados ou as amplitudes dos ângulos, por exemplo. Os alunos concluem que o uso deste *software* permite superar algumas dificuldades.

A autora do estudo conclui que a utilização do Geogebra fez com que os alunos se tornassem mais autónomos e ativos na realização das tarefas, contudo, tornou as aulas mais barulhentas do que o habitual.

Finalmente, destaco o relatório de prática de ensino supervisionada de Miranda (2010), sob o título "A Aprendizagem da Trigonometria do Triângulo Rectângulo através da Resolução de Problemas". Este é um estudo focado na resolução de problemas, como explicita o título.

A autora começa por concluir que a estratégia mais utilizada pelos alunos é aquela onde estes identificam a informação que é dada e a que é pretendida, de forma a conseguiram dar resposta ao problema. Aponta, também, que em problemas onde exista uma representação geométrica, os alunos servem-se desta para mais facilmente visualizarem os dados do problema, pelo contrário, quando esta representação não existe, os alunos fazem uma que os auxilie.

Quando os alunos num problema podem optar entre a utilização dos seus conhecimentos acerca da Trigonometria e outros conteúdos anteriormente lecionados, o estudo mostra que estes optam pelos conteúdos anteriormente lecionados.

A utilização da máquina calculadora foi também essencial nesta intervenção dado que permitiu uma economia no tempo de cálculo que pôde ser utilizado de forma útil para os alunos pensarem em estratégias de resolução de problemas, por exemplo.

As maiores dificuldades dos alunos relacionam-se com os conteúdos anteriormente lecionados, como são exemplo a linguagem simbólica, a ausência do sinal de equivalente, do símbolo de grau e do sinal de aproximadamente, dificuldades com os arredondamentos e com a manipulação algébrica de equações.

Conclui-se que os alunos com maior insucesso na Matemática gostaram do trabalho em grupo o que fez com que passassem a intervir mais na aula, incluindo em apresentarem as suas estratégias de resolução no quadro.

Assim, as estratégias implementadas para a lecionação desta Unidade Didática por Miranda (2010) permitiram que os alunos raciocinassem matematicamente, desenvolvessem a sua comunicação escrita e oral e compreendessem que não há uma única forma de abordar um problema.

Capítulo 3 : Unidade didática

Neste capítulo serão abordados os aspetos relacionados com as opções metodológicas referentes à Unidade Didática. Inicia-se com uma caracterização do contexto, incidindo-se na escola e na turma em que foi realizada a intervenção. De seguida apresenta-se uma ancoragem da Unidade Didática, tendo por base o Programa e Metas Curriculares (MEC, 2013), mostrando-se a sua planificação e os conceitos matemáticos lecionados. Posteriormente são referidas as estratégias de ensino e recursos utilizados, justificando as escolhas efetuadas, tendo em conta o estudo e o contexto escolar onde este foi realizado. Apresentam-se, posteriormente, as tarefas que foram propostas no decorrer da intervenção, explicitando os seus objetivos e tipificando-as conforme quadro 2.3. São ainda mencionadas as modalidades de avaliação utilizadas, terminando-se o capítulo com as reflexões das aulas lecionadas.

3.1. Contexto escolar

3.1.1. Caracterização da escola

Fundado em 1803, o Colégio Militar (CM) é uma das instituições de ensino mais antigas em Portugal, conhecido por contemplar disciplinas do foro militar no seu currículo escolar, dado que é "um estabelecimento militar de ensino não-superior, inserido na orgânica do Exército, tutelado pelo Ministério da Defesa Nacional, seguindo as diretrizes pedagógicas emanadas pelo Ministério da Educação e Ciência." (CM, 2016, p. 4). Até 2013 a escola era exclusivamente frequentada por elementos do sexo masculino mas, desde então, passou a ser uma escola mista. O CM tem ainda uma outra particularidade: a grande maioria dos seus alunos está em regime de internato. Até ao anterior ano letivo, o CM funcionava com regime de internato masculino obrigatório, no entanto, atualmente esta opção é dada a partir do 2.º ciclo do EB, para ambos os sexos.

O colégio acolhe um total de 770 alunos[1], desde o 1.º ciclo do EB até Ensino Secundário, sendo que a oferta formativa restringe-se ao ensino regular. Para além do

[1] Todos os dados aqui apresentados provêm do Projeto educativo para o triénio 2016/2019 (https://www.colegiomilitar.pt/documentos-estruturantes/projeto-educativo/)

currículo habitual, os alunos têm as disciplinas associadas ao regime militar como é exemplo a Instrução Militar. O colégio disponibiliza ainda as seguintes Atividades de Complemento Curricular (ACC): judo; ginástica; esgrima; equitação; robótica; música e inglês.

No que diz respeito aos espaços e recursos físicos, o CM alberga 52 salas de aula (a grande maioria, senão todas, contempla um projetor e uma tela branca) que estão distribuídas por três edifícios; um auditório de 400 lugares; uma biblioteca; um salão nobre; uma sala de leitura; um arquivo histórico; uma sala de armas; Museu do Colégio Militar e Museu de História Natural. Inclui, também, o Pavilhão das Ciências, com salas com materiais para as Ciências Naturais. Tem ainda edifícios de alojamento dos alunos, bem como instalações para as práticas desportivas, como por exemplo campos de futebol, andebol ou ainda picadeiros.

Relativamente aos recursos humanos do CM, trabalham ali 89 professores, dos quais 67 pertencentes ao Mapa de Pessoal Civil do Exército (MPCE). Ainda de referir que no corpo de profissionais efetivos 94 são militares e 90 civis.

3.1.2. Caracterização da turma

A turma onde realizei a intervenção é uma das quatro turmas do 9.º ano do 3.º ciclo do EB do CM. É constituída por 18 alunos, sendo oito do sexo feminino. Dos 18 alunos, 13 estão em regime de internato. Não há alunos com reprovações nem com necessidades educativas especiais.

Caracteristicamente, esta é uma turma muito participativa e interessada, no entanto, nota-se que, quando querem participar, fazem-no, na grande maioria das vezes, de uma forma coletiva e desorganizada. Para além disto, entusiasmam-se facilmente com a temática da aula, aproveitando para conversar e, eventualmente, desviam-se do tópico que está a ser tratado. Contudo, é importante mencionar que quando começam a trabalhar, fazem-no com muito afinco, demonstrando muito empenho na realização das tarefas e sendo bastante indagadores acerca dos assuntos em pauta, evidenciando vontade em aprender o que está a ser lecionado. Desta forma, percebe-se que o trabalho do professor com esta turma é muito intenso, dado que tem de os disciplinar no sentido de poderem dar o seu contributo ordeiramente, mas, sem nunca os inibir visto que estes alunos através das suas intervenções, fazem questões muito pertinentes e que muito facilitam o trabalho do professor.

Poder-se-ia dividir a turma em dois grupos: o primeiro grupo constituído por alunos com muita vontade de aprender e que trabalham, de forma constante, autónoma muito eficiente; e um segundo grupo, onde isso já não se verifica, sendo alunos que precisam de uma motivação externa. Mas, quando se juntam elementos de ambos os grupos para trabalharem de forma cooperativa e colaborativa, estes últimos são contagiados pelos primeiros, demonstrando o espírito de grupo e união que esta turma tem.

As maiores dificuldades da turma que fui observando ao longo do ano letivo, no que diz respeito à disciplina de Matemática, têm que ver com a linguagem e simbologia matemáticas, e com a abstração envolvida no raciocínio matemático, nomeadamente, em situações de demonstração de resultados.

Debrucemo-nos, agora sobre o desempenho académico da turma. Apesar dos níveis de avaliação do 3.º ciclo do EB serem compreendidos entre 1 e 5, no CM, em reuniões de avaliação e nas pautas que posteriormente são publicadas para conhecimento dos alunos e Encarregados de Educação (EE), as classificações dos alunos são apresentadas numa escala de zero a 200, com a seguinte correspondência: 0-49: nível 1; 50-99: nível 2; 100-139: nível 3; 140-190: nível 4; 191-200; nível 5. Para além da avaliação quantitativa da turma, é feita, igualmente uma avaliação qualitativa do comportamento. A escala utilizada para ambos os casos contempla quatro níveis: Insuficiente, Suficiente, Bom e Muito Bom.

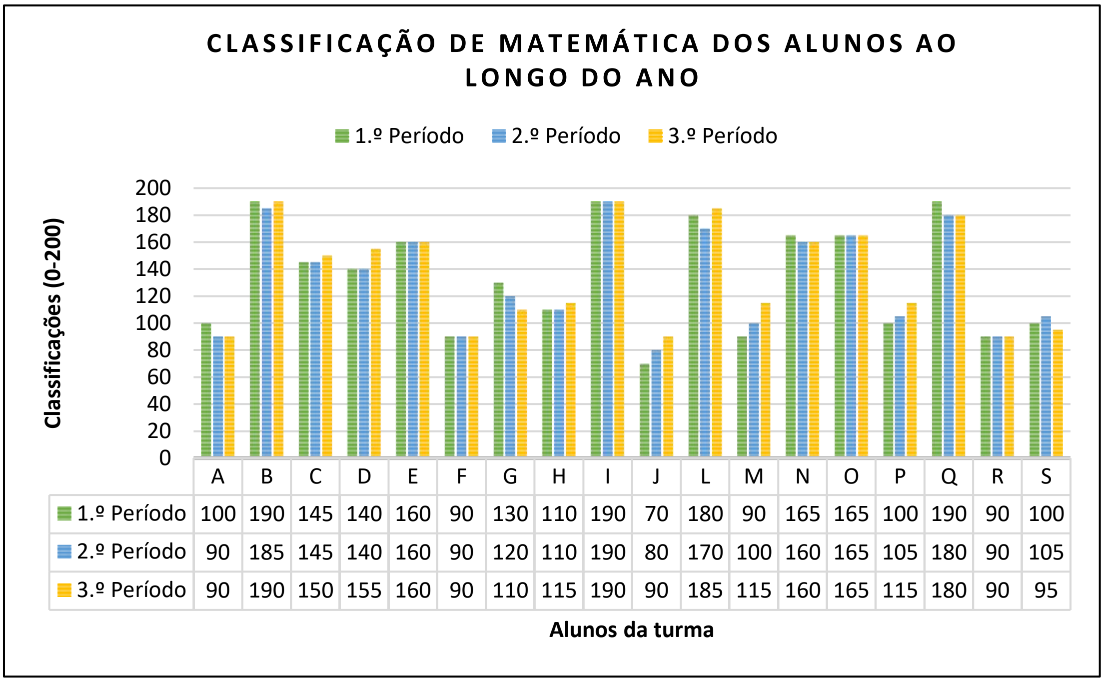
Deste modo, analisemos os resultados obtidos pela turma, no decorrer dos diferentes períodos do ano letivo em questão, relacionando para tal a média geral da turma com a média obtida na disciplina de Matemática.

No primeiro período a média da turma foi 142,1 (portanto, o aproveitamento foi classificado pelo Conselho de Turma (CT) como Bom), havendo dois alunos com níveis de avaliação negativos em cinco disciplinas (onde se inclui a Matemática), e, portanto, foram elaborados Planos de Acompanhamento Pedagógico Individual (PAPI). Em contraponto, sete alunos mereceram menção de quadro de honra, dado que obtiveram uma média superior ou igual a 155 pontos e não apresentam problemas relacionados com o comportamento. Comparativamente, na disciplina de Matemática, a média do 1.º período foi 133,6, havendo quatro negativas (todas de nível 2, entre as quais um aluno com avaliação de 70 pontos); cinco alunos com nível 3 e nove alunos com nível 4. No que respeita ao comportamento, o CT avalia a turma com nível Bom.

No segundo período a média da turma foi 145,1, logo, o aproveitamento foi considerado Bom. Há sete alunos com níveis inferiores a 3, tendo sido avaliados e atualizados os respetivos PAPI's. Destacam-se dois alunos, ambos com três classificações negativas, de nível 2, onde estão incluídas as disciplinas Português e a Matemática. Nestes sete alunos, incluem-se dois que no período passado tinham cinco disciplinas com níveis negativos, os quais, fizeram progresso conseguindo recuperar três das cinco disciplinas. Há, também, alunos com menção de quadro de honra: os mesmos sete do período anterior. Em relação à Matemática, a média da turma foi 132,5, havendo quatro negativas (três alunos mantém a classificação do 1.º período, no entanto, a quarta classificação negativa não diz respeito ao mesmo aluno do período passado, sendo esse um caso de sucesso), todas de nível 2. Relativamente ao comportamento da turma, o CT classifica-o como Bom.

No terceiro período a média da turma foi 147,4 (aproveitamento classificado como Bom), havendo os mesmos sete quadros de honra e 13 menções para medalhas (prata e ouro). Há apenas quatro alunos com níveis iguais a 2, todos eles na disciplina de Matemática, não havendo nenhum impossibilitado de realizar provas finais de ciclo. Relativamente à Matemática o número de negativas manteve-se em relação ao período passado, tendo sido a média da turma de 135,8. O comportamento da turma no final do ano é classificado pelo CT como Bom.

Desde o início do ano letivo nota-se uma evolução da turma não só pela subida da média geral de classificações, mas também pelo número de negativas de cada aluno e o progresso dos alunos para os quais foram elaborados PAPI's, que foram avaliados em conformidade com os resultados das avaliações, concluindo-se que todos foram cumpridos. Já em relação à Matemática, não se pode afirmar o mesmo, existindo, de forma geral, uma ligeira descida nas classificações. As classificações de Matemática ao longo do ano estão registadas no gráfico que a seguir se apresenta (figura 3.1.), onde o eixo vertical representa as classificações de 0-200 e o eixo horizontal, cada aluno da turma. Cada elemento da turma apresenta três barras que dizem respeito à classificação nos três períodos, sendo que por baixo de cada uma aparece o número que corresponde a cada barra, para facilitar a compreensão do gráfico. Assim, por exemplo se quiser saber a classificação do aluno D, verifica-se que no 1.º e 2.º períodos obteve 140 pontos, terminando o ano com 155 pontos – classificação do 3.º período.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	M	N	O	P	Q	R	S
1.º Período	100	190	145	140	160	90	130	110	190	70	180	90	165	165	100	190	90	100
2.º Período	90	185	145	140	160	90	120	110	190	80	170	100	160	165	105	180	90	105
3.º Período	90	190	150	155	160	90	110	115	190	90	185	115	160	165	115	180	90	95

***Figura 3.1**: Classificação dos alunos na disciplina de Matemática nos três períodos letivos*

3.2. Ancoragem da Unidade Didática

Para a aprendizagem da Unidade Didática da Trigonometria de 9.º ano do 3.º ciclo do EB, os alunos precisam de ter conhecimento sobre ângulos, em particular agudos, e sobre triângulos e suas propriedades. Desde muito cedo que os alunos começam a contactar com as noções subjacentes a estes conceitos.

Olhando para o Programa e Metas Curriculares do Ensino Básico (MEC, 2013), pode observar-se que é no 2.º ciclo que os alunos são introduzidos aos critérios de igualdade de triângulos. Já no 3.º ciclo do EB, no 7.º ano, aprendem os critérios de semelhança de triângulos e o Teorema de Tales e, no 8.º ano, o Teorema de Pitágoras e o seu recíproco. Tendo por base o Programa e Metas Curriculares para o 9.º ano do 3.º ciclo do EB (MEC, 2013) pode verificar-se que tópico da Trigonometria se inclui no domínio da Geometria e Medida 9 (GM9). É, então, no 9.º ano que os alunos contactam pela primeira vez com a Trigonometria, abordando apenas as razões trigonométricas de ângulos agudos e as relações que decorrem destas razões, nomeadamente a Fórmula Fundamental da Trigonometria (mais detalhe no quadro 3.1.).

No Colégio Militar, na planificação anual para o 9.º ano foram atribuídos 14 tempos de 45 minutos para a lecionação da Trigonometria, aos quais acrescem dois tempos para a realização do teste sumativo e mais um outro tempo para revisão dos conceitos lecionados. Assim, a minha planificação desta unidade seguiu a organização do quadro seguinte (3.1.), onde cada tempo corresponde a 45 minutos. Neste quadro (3.1.) são apresentadas todas as aulas lecionadas durante a Unidade Didática mencionando a sua data de realização, duração e os respetivos objetivos de ensino com a lecionação das mesmas.

Quadro 3.1:*Planificação da Unidade Didática*

Data	*Tempos*	*Objetivos de ensino*
14 fev	2	• Rever a semelhança de triângulos; • Introduzir as definições de seno, cosseno e tangente de um ângulo agudo.
21 fev	2	• Verificar a invariância de cada razão trigonométrica de um ângulo agudo; • Reconhecer o intervalo de variação das razões trigonométricas de um ângulo agudo.
25 fev	1	• Reconhecer a igualdade das razões trigonométricas de dois ângulos com igual amplitude.
26 fev	2	(*)[2]
28 fev	2	• Utilizar a tabela trigonométrica e a calculadora científica como instrumentos auxiliares para a determinação de incógnitas; • Resolver triângulos retângulos: determinação de lados e ângulos desconhecidos.
11 mar	1	• Resolver problemas em contexto de realidade: determinar distâncias a locais inacessíveis.
12 mar	2	• Provar relações entre razões trigonométricas de um mesmo ângulo: Fórmula Fundamental da Trigonometria (FFT) e $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$.
14 mar	2	• Verificar a relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares; • Determinar o valor exato dos ângulos de $30°, 45°$ e $60°$.
15 mar	1	• Resolver problemas envolvendo a determinação de distâncias utilizando as razões trigonométricas dos ângulos de $30°, 45°$ e 60.

(*)[2] Nesta aula foi feita a entrega e a correção dos testes de avaliação sumativa escritos referentes aos conteúdos lecionados anteriormente, da responsabilidade da professora titular da turma.

		• Determinar o valor exato de razões trigonométricas, conhecendo o valor de uma delas; • Resolver problemas.
19 mar	2	• Resolver problemas; • Realização de questão de aula.
21 mar	2	• Corrigir questão de aula; • Realizar exercícios de consolidação.
25 mar	2	• Teste de avaliação sumativa escrito.
23 abr	2	• Determinação de distâncias inacessíveis: utilização do quadrante

3.3. Conceitos matemáticos envolvidos

Cabe nesta secção o aprofundamento teórico sobre os conceitos matemáticos envolvidos na lecionação desta Unidade Didática. Interessa, talvez, começar por relembrar alguma da simbologia (notação) utilizada e que é de fundamental importância para a compreensão dos tópicos mais elementares de geometria, apresenta-se, assim, o seguinte quadro (3.2.) onde se sumaria alguma notação matemática de maior relevo.

Quadro 3.2: *Dicionário da notação matemática*

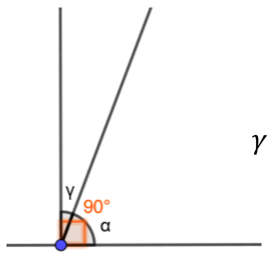
Notação matemática	***Significado***
$[AB]$	Representa o segmento de reta com extremos A e B
$\overline{AB}$	Representa o comprimento do segmento de reta com extremos A e B
$\measuredangle ABC$	Representa o ângulo de vértice B em que um lado passa por A e outro por C.
$A\hat{B}C$	Representa a amplitude do ângulo de vértice B em que um lado passa por A e outro por C
$\equiv$	É o símbolo de congruente, e que significa geometricamente igual.

Note-se, ainda, que para representar um determinado ângulo, é muito usual a utilização do alfabeto grego, ao invés das letras maiúsculas como aparece no quadro anterior (3.1.). São exemplos de algumas dessas letras: $\alpha\ (alfa)$, $\beta(beta)$, $\gamma(gama)$, $\delta(delta)$, $\theta(teta)$.

3.3.1. Conhecimentos prévios

Para iniciar a lecionação da Trigonometria, é necessário, primeiramente, revisitar alguns conceitos já abordados pelos alunos em anos prévios: Semelhança de triângulos e Teorema de Tales; Teorema de Pitágoras e seu recíproco e ainda ângulos complementares. A sua exposição neste trabalho seguirá a ordem pela qual surgem no programa da disciplina ao longo do ensino básico, assim, começar-se-á, pela definição de ângulos complementares, que é abordada no 5.º ano do 2.º Ciclo do EB:

<u>Ângulos Complementares</u>: Dois ângulos são complementares quando a soma das suas amplitudes é 90°. A sua representação está na figura 3.2.



$$\gamma + \alpha = 90°$$

Figura 3.2: *Ângulos complementares*

De seguida, e já no 7.º ano do 3.º Ciclo do EB, enuncia-se o Teorema de Tales.

<u>Teorema de Tales</u>: Se num mesmo plano, duas retas paralelas intersetam duas retas secantes, os triângulos obtidos têm os comprimentos dos lados correspondentes diretamente proporcionais (figura 3.3.).

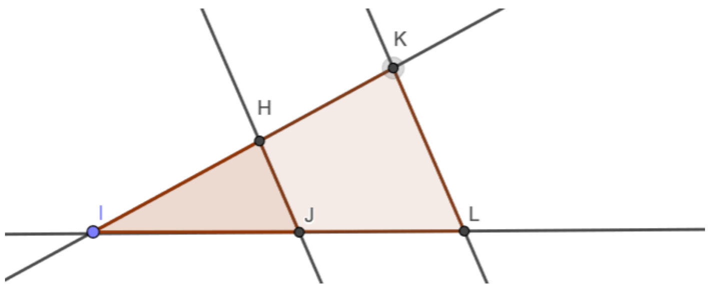


Figura 3.3*: Ilustração do Teorema de Tales*

Nas condições da figura 3.3., pelo Teorema de Tales tem-se:

$$\frac{\overline{IK}}{\overline{IH}} = \frac{\overline{IL}}{\overline{IJ}} = \frac{\overline{KL}}{\overline{HJ}}.$$

Também se verificam as seguintes proporções:

$$\frac{\overline{IH}}{\overline{HK}} = \frac{\overline{IJ}}{\overline{JL}} \ e \ \frac{\overline{IK}}{\overline{HK}} = \frac{\overline{IL}}{\overline{JL}}.$$

Ainda no 7.º ano do 3.º Ciclo do EB é lecionada a semelhança de triângulos. Mas antes, é vista a semelhança entre quaisquer duas figuras geométricas:

Semelhança: Duas figuras dizem-se semelhantes quando é possível estabelecer entre os respetivos pontos uma correspondência um a um de tal modo que as distâncias entre pares de pontos correspondentes são diretamente proporcionais. À constante de proporcionalidade direta chame-se razão de semelhança. Uma correspondência com a propriedade anterior designa-se por semelhança.

No caso concreto dos triângulos são apresentados critérios que nos permitem concluir se existe ou não esta correspondência:

- **Critério Ângulo-Ângulo (critério AA):** Dois triângulos são semelhantes se têm dois ângulos geometricamente iguais.
- **Critério Lado-Lado-Lado (critério LLL):** Dois triângulos são semelhantes se têm os três lados proporcionais.
- **Critério Lado-Ângulo-Lado (critério LAL):** Dois triângulos são semelhantes se têm dois lados proporcionais e os ângulos por eles formados geometricamente iguais.

Assim, para verificar que dois triângulos são semelhantes basta utilizar um dos critérios acima.

Falta somente abordar o Teorema de Pitágoras e o seu recíproco que são lecionados no 8.º ano de escolaridade.

Teorema de Pitágoras: Num triângulo retângulo, o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos. Simbolicamente: $a^2 = b^2 + c^2$, sendo a, b e $c > 0$, como representados na figura 3.4.

Nota: A hipotenusa é o maior segmento do triângulo e aquele que é oposto ao ângulo reto, ficando, assim, determinados automaticamente, os catetos.

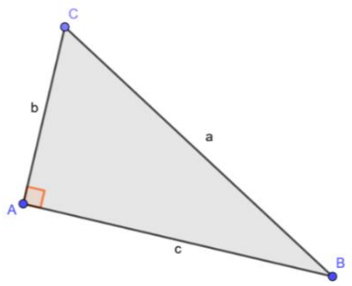


Figura 3.4: *Triângulo retângulo*

<u>Recíproco do Teorema de Pitágoras</u>: Um triângulo cujas medidas dos lados sejam a, b e c, (positivos e como representados na figura 3.4.) é retângulo no vértice oposto ao lado de medida a desde que $a^2 = b^2 + c^2$.

3.3.2. Definição das razões trigonométricas

Num triângulo retângulo, os lados têm nomes especiais. Já se viu que o lado de maior comprimento (ou o lado oposto ao ângulo reto) denomina-se de hipotenusa, e que os outros dois lados são os catetos, no entanto, também os catetos terão designações específicas. Fixando um ângulo agudo do triângulo, designe-se de cateto oposto, ao lado oposto a esse mesmo ângulo e denomine-se de cateto adjacente ao lado "vizinho" a esse ângulo.

Pelo critério AA da semelhança de triângulos e depois de alguns cálculos conseguimos definir as razões trigonométricas, veja-se como.

Considerem-se os triângulos $[OAB]$ e $[OCD]$, retângulos em A e em C, respetivamente, como ilustra a figura 3.5.:

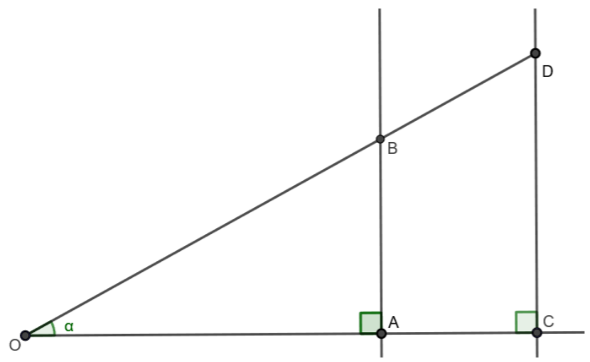


Figura 3.5: *Construção com dois triângulos retângulos*

Observa-se que $\sphericalangle COD$ é partilhado por ambos os triângulos e que $O\hat{A}B = 90° = D\hat{C}O$. Logo pelo critério AA, os triângulos são semelhantes.

Assim, tem-se, por exemplo, que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{OB}}{\overline{OD}}$$

Reescrevendo esta proporcionalidade, sai:

$$\overline{AB} \times \overline{OD} = \overline{OB} \times \overline{DC} \Leftrightarrow \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{OD}}$$

Repare-se que $\overline{OB}$ e $\overline{OD}$ representam os comprimentos das hipotenusas nos triângulos $[OAB]$ e $[OCD]$, respetivamente, e que $\overline{BA}$ e $\overline{DC}$ representam os comprimentos dos catetos opostos ao ângulo α nos triângulos $[OAB]$ e $[OCD]$, respetivamente.

Assim,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{DC}}{\overline{OD}}$$

traduz o quociente entre os comprimentos do cateto oposto ao ângulo α e da hipotenusa, nos respetivos triângulos.

A esta razão, designa-se de seno de α, e escreve-se, simbolicamente, $sen\alpha$ ou $sin\alpha$.

Logo,

$$sen\ \alpha = \frac{comprimento\ do\ cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ \alpha}{comprimento\ da\ hipotenusa}$$

De forma análoga, e escolhendo os comprimentos convenientes, consegue-se definir as restantes razões trigonométricas, cosseno e tangente, respetivamente:

$$cos\ \alpha = \frac{comprimento\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ \alpha}{comprimento\ da\ hipotenusa}$$

$$tan\ \alpha = tg\ \alpha = \frac{comprimento\ do\ cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ \alpha}{comprimento\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ \alpha}$$

É importante sublinhar que ângulos de igual amplitude, assumem o mesmo valor para as razões trigonométricas, isto é, se $\hat{\gamma} = \widehat{\gamma'}$, então, $sen\,\gamma = sen\,\gamma'$; $cos\,\gamma = cos\,\gamma'$ e $tg\,\gamma = tg\,\gamma'$.

Apresenta-se, por exemplo, a demonstração para o caso da tangente, ou seja, $\hat{\gamma} = \widehat{\gamma'}, então\ tg\,\gamma = tg\,\gamma'$, sendo a demonstração para as outras duas razões trigonométricas completamente análogas.

demonstração:

Considerem-se os dois triângulos seguintes, $[ABC]$ e $[DEF]$, retângulos em B e em E, respetivamente, como representado na figura 3.6. Considerem-se, ainda, dois ângulos γ e γ' de vértices A e D, com a mesma amplitude, i.é, $\hat{\gamma} = \widehat{\gamma'}$.

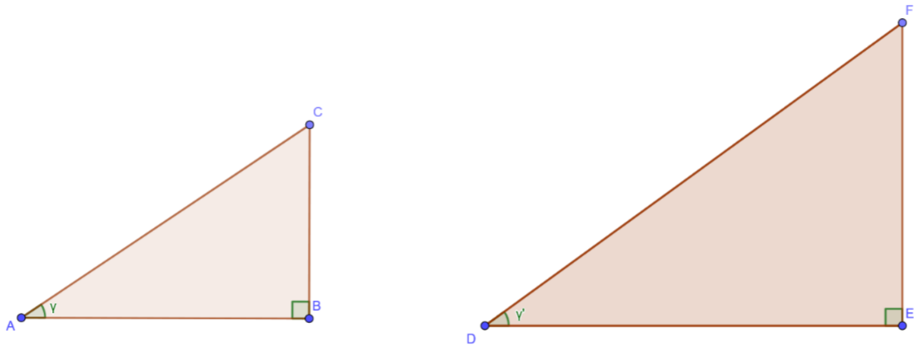


Figura 3.6: *Dois triângulos retângulos semelhantes*

Como $\hat{\gamma} = \widehat{\gamma'}$ e $\hat{B} = \hat{E} = 90°$, pelo critério AA (ângulo-ângulo), pode-se concluir que os triângulos $[ABC]$ e $[DEF]$ são semelhantes. Logo, sai:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{FE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}$$

Reescrevendo, de forma a obter a razão trigonométrica pretendida, tem-se:

$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FE}}{\overline{DE}} \Leftrightarrow tg\,\gamma = tg\,\gamma'.$$ ■

Nota: O valor das razões trigonométricas de um ângulo agudo é independente da unidade de comprimento fixada.

Exemplo:

Considere-se o triângulo $[ABC]$, retângulo em B, representado na figura 3.7.

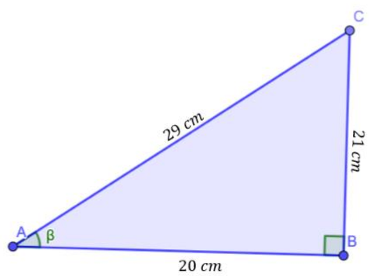


Figura 3.7*: Triângulo retângulo com medidas expressas*

As razões trigonométricas referentes ao ângulo $\boldsymbol{\beta}$:

$$sen\, \beta = \frac{21}{29};\ cos\, \beta = \frac{20}{29};\ tg\, \beta = \frac{21}{20}$$

Se os comprimentos dos lados figurassem em dm, as razões trigonométricas referentes ao ângulo β, seriam:

$$sen\, \beta = \frac{2{,}1}{2{,}9} = \frac{21}{29};\ cos\, \beta = \frac{2{,}0}{2{,}9} = \frac{20}{29};\ tg\, \beta = \frac{2{,}1}{2{,}0} = \frac{21}{20}.$$

Assim, tomando para unidade de comprimento o decímetro, as razões trigonométricas mantêm-se.

3.3.3. Intervalo de variação das razões trigonométricas

A pergunta que agora se impõe é: Que valores podem tomar estes quocientes, tendo em conta que estas razões são obtidas através de triângulos retângulos e, portanto, o ângulo à qual se referem é sempre agudo?

Vimos que $sen\, \alpha = \frac{comprimento\ do\ cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ \alpha}{comprimento\ da\ hipotenusa}$. Como se está num triângulo retângulo, o comprimento da hipotenusa é sempre maior que o comprimento de qualquer um dos catetos, em particular, será maior do que o comprimento do cateto oposto ao ângulo em questão, logo, obtém-se uma fração onde o numerador será sempre menor do que o denominador, tomando ambos valores positivos, por definição da razão trigonométrica, logo o quociente será sempre um número menor do que um. Note-se que nunca poderá ser um, porque, caso isso acontecesse, implicitamente, estar-se-ia a indicar que o comprimento do cateto oposto ao ângulo α seria igual ao comprimento da hipotenusa, o que seria impossível para qualquer triângulo retângulo, por definição de hipotenusa. Então, esta fração pode tomar valores muito próximos de um, mas nunca poderá ser um. Já conseguimos limitar superiormente esta razão. E inferiormente, o que sucederá? Uma vez que se trata de comprimentos de lados de um triângulo, por definição de medida de comprimento, percebe-se que esta só poderá tomar valores positivos. E zero? Para que este quociente seja nulo, é necessário que o numerador do mesmo se anule, isto é, que o comprimento do cateto oposto ao ângulo α seja igual a zero. Ora, mas isto não pode acontecer, porque neste caso, o triângulo "desapareceria". Pode observar-se, então, que esta razão pode tomar valores muito próximos de zero, sem nunca chegar a anular-se. Em suma:

$$0 < sen\,\alpha < 1, \qquad \forall \alpha\ agudo.$$

Estabelecendo um raciocínio completamente análogo a este, conclui-se que

$$0 < cos\,\alpha < 1, \qquad \forall \alpha\ agudo.$$

Falta, apenas, perceber que valores é que a tangente de um ângulo agudo pode assumir. Repare-se que a tangente é o quociente entre os comprimentos dos dois catetos de um triângulo retângulo, então, visto que resulta do quociente entre duas medidas de comprimento, o seu resultado será sempre um número positivo, portanto, $tg\,\alpha > 0$. Caso o comprimento de ambos os catetos seja igual, então, $tg\,\alpha = 1$; caso o numerador seja menor do que o denominador, ou seja, o comprimento do cateto oposto seja menor do que o comprimento do cateto adjacente, o quociente (tangente) será menor do que um, isto é, $tg\,\alpha < 1$; caso o numerador seja maior do que denominador, isto é, o comprimento do cateto oposto seja maior do que o do cateto adjacente, o resultado será um número maior do que um, ou seja, $tg\,\alpha > 1$.

3.3.4. Relações entre as razões trigonométricas

Agora que já vimos que valores podem tomar as razões trigonométricas, veja-se como se podem relacionar de forma a, conhecendo o valor de uma delas, conseguirmos determinar o valor das restantes.

A) Relação entre o seno e o cosseno de um mesmo ângulo agudo – Fórmula Fundamental da Trigonometria (FFT):

$$sen^2\beta + cos^2\beta = 1$$

B) Relação entre o seno, cosseno e tangente de um mesmo ângulo agudo, β:

$$tg\,\beta = \frac{sen\,\beta}{cos\,\beta}$$

C) Relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares:

$$sen\,\hat{\beta} = cos\,\left(90° - \hat{\beta}\right);\, cos\,\hat{\beta} = sen(90° - \hat{\beta})$$

Demonstrem-se as relações acima enunciadas. Para isso utilizar-se-á o seguinte triângulo retângulo (figura 3.8.).

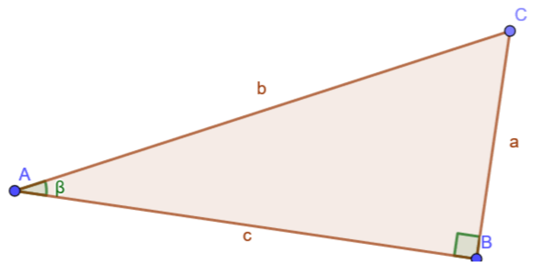


Figura 3.8*: Ilustração de um qualquer triângulo retângulo*

demonstração de A):

Quer-se provar que $sen^2\beta + cos^2\beta = 1$.

Escreva-se $sen^2\beta$ e $cos^2\beta$. Ora,

$$sen\ \beta = \frac{a}{b};\ cos\ \beta = \frac{c}{b}.$$

Elevando a dois ambos os quocientes, tem-se:

$$sen^2\ \beta = \frac{a^2}{b^2}; cos^2\beta = \frac{c^2}{b^2}.$$

Somando ambas as frações, sai:

$$sen^2\ \beta + cos^2\beta = \frac{a^2}{b^2} + \frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2 + c^2}{b^2}.$$

Pelo Teorema de Pitágoras (que pode ser usado, dado que o triângulo é retângulo), sabe-se que $a^2 + c^2 = b^2$, logo:

$$\frac{a^2 + c^2}{b^2} = \frac{b^2}{b^2} = 1.$$

■

demonstração de B):

Quer-se provar que $tg\beta = \frac{sen\beta}{cos\beta}$.

Pela definição de $tg\beta$ tem-se:

$$tg\beta = \frac{a}{c}.$$

Por outro lado, tem-se:

$$sen\ \beta = \frac{a}{b};\ cos\ \beta = \frac{c}{b}.$$

Calculando o quociente entre o seno e o cosseno, obtém-se:

$$\frac{sen\,\beta}{cos\,\beta} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{b}} = \frac{a}{c}.$$

■

demonstração de C):

Quer-se provar que $sen\,\hat{\beta} = cos\,\left(90° - \hat{\beta}\right)$.

Pela definição de $sen\,\hat{\beta}$ tem-se:

$$sen\,\hat{\beta} = \frac{a}{b}.$$

Sabe-se que $90° - \hat{\beta} = B\hat{C}A$. Assim,

$$cos\,\left(90° - \hat{\beta}\right) = cos\,B\hat{C}A = \frac{a}{b} = sen\ \hat{\beta}.$$

Utilizando argumentos análogos, conclui-se que:

$$cos\,\hat{\beta} = sen\,\left(90° - \hat{\beta}\right).$$

■

3.3.5. Valores exatos de ângulos de amplitude de $\mathbf{30°, 45°}$ e $\mathbf{60°}$

A fechar a Trigonometria lecionada no EB, é feita a dedução dos valores das razões trigonométricas dos ângulos de referência (ou ângulos notáveis), ou seja, dos ângulos de $\mathbf{30°, 45°}$ e $\mathbf{60°}$. Novamente, utilizar-se-ão argumentos geométricos para que esta dedução seja feita. Veja-se como.

Comece-se por deduzir o valor das razões trigonométricas dos ângulos de amplitude $\mathbf{45°}$. Para isto, precisa-se de um triângulo retângulo, com um ângulo de $\mathbf{45°}$. Como já se sabe que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é $\mathbf{180°}$, percebe-se que, se um dos ângulos tem amplitude $\mathbf{45°}$, o outro ângulo (que não o reto) terá de ter amplitude, também, $\mathbf{45°}$, logo, como a ângulos iguais se opõem lados iguais, compreende-se que o triângulo, para além de ter dois ângulos iguais, terá dois lados iguais, logo é um triângulo isósceles. Reciprocamente, se um triângulo retângulo for isósceles, então a amplitude dos seus ângulos agudos tem de ser $\mathbf{45°}$. Na figura 3.9. ilustra-se um triângulo nestas condições.

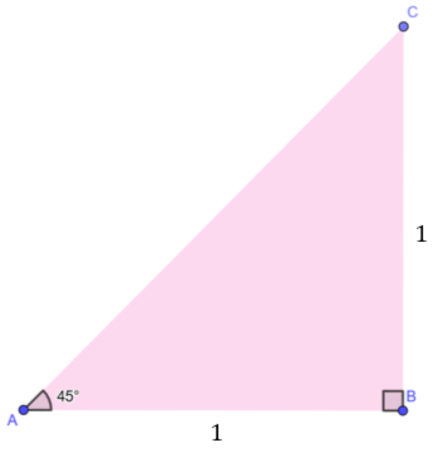


***Figura 3.9**: Triângulo retângulo isósceles*

Para facilitar os cálculos, considere-se que os comprimentos dos catetos serão iguais a um. Calcule-se, então, o valor das razões trigonométricas do ângulo de 45°. Antes, precisa-se de calcular o valor do comprimento da hipotenusa, para isso, utilize-se o Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 1^2 + 1^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{2},$$

$\overline{AC} > 0$, porque $\overline{AC}$ é uma medida de comprimento.

Então, pela definição de cada uma das razões trigonométricas, sai:

$$sen45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};\ cos45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};\ tg45° = \frac{1}{1} = 1.$$

■

Deduzidos que estão os valores das razões trigonométricas referentes ao ângulo de 45°, precisa-se, agora, de um triângulo retângulo onde um dos ângulos seja 30°. Ora, dado que este é um triângulo retângulo, e a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°, utilizando este mesmo triângulo, conseguimos deduzir também os valores das razões trigonométricas do ângulo de 60° (por complementaridade dos ângulos). Comece-se por se considerar um triângulo equilátero, que por definição tem todos lados com o mesmo comprimento e, portanto, todos os ângulos internos com a mesma amplitude (60°). Por conveniência, considere-se que o comprimento dos seus lados é 2 (figura 3.10), note-se, no entanto, e tal como no caso anterior, que é possível escolher qualquer valor para o comprimento do lado.

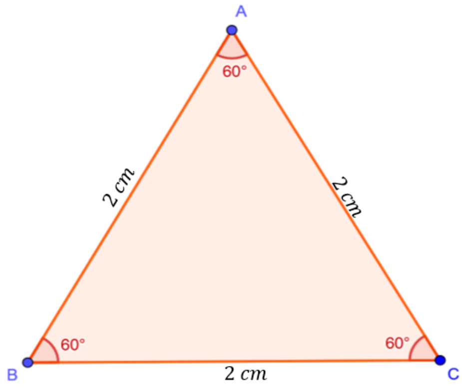


***Figura 3.10**: Triângulo equilátero com o comprimento de lado* $2\ cm$

Dado que o que interessa é obter um triângulo retângulo, dever-se-á traçar a altura do triângulo relativa ao vértice A, obtendo-se, assim, o ponto D, que resulta da interseção do segmento que traduz a altura do triângulo com o lado $[BC]$ do triângulo (figura 5.10.). Pela definição de altura, e por este ser um triângulo equilátero, o ponto D é o ponto médio do segmento de reta $[BC]$, por isso, $\overline{BD} = \overline{DC} = 1\ cm$. Veja-se a figura 5.11. que reflete esta situação.

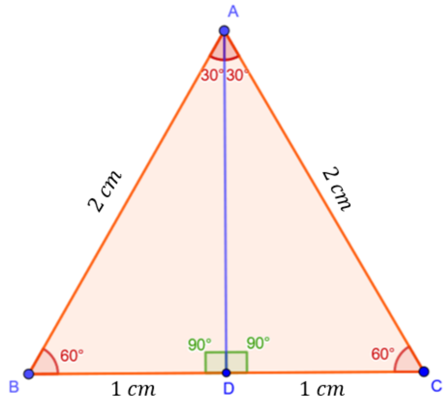


***Figura 3.11**: Triângulo retângulo com os ângulos de 30° e 60° marcados*

Pelo Teorema de Pitágoras, é possível determinar o comprimento do segmento de reta $[AD]$. Tem-se:

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2 \Leftrightarrow 2^2 = 1^2 + \overline{AD}^2 \Leftrightarrow 4 - 1 = \overline{AD}^2 \Leftrightarrow \overline{AD} = \sqrt{3},$$
$$porque\ \overline{AD}\ \text{é}\ uma\ medida\ de\ comprimento.$$

Agora que já estão determinados os comprimentos de todos os lados do triângulo, pela definição das razões trigonométricas, sai:

$$sen\ 30° = \frac{1}{2}; cos\ 30° = \frac{\sqrt{3}}{2};\ tg\ 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$sen\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}; cos\ 60° = \frac{1}{2};\ tg\ 60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}.$$

■

Assim, sucintamente, tabela 3.1. reúne os valores exatos dos ângulos de referência.

***Tabela 3.1**: Valores exatos dos ângulos de referência*

	$\mathbf{30°}$	$\mathbf{45°}$	$\mathbf{60°}$
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

3.4. Estratégias de ensino e recursos utilizados

3.4.1. Abordagem de ensino

Ponte (2005) refere que podem ser realizadas duas diferentes abordagens de ensino: direto ou exploratório, sendo que aquilo que define qual das duas é a eleita é o tipo de tarefas propostas, o trabalho realizado, mais frequentemente, com os alunos, e a forma como são introduzidos novos conteúdos. Quer-se com isto dizer que, optando-se, de uma forma sistemática, por um método mais expositivo dos conteúdos e com grande foco na realização de exercícios rotineiros, estamos perante uma abordagem de ensino direto. Por outro lado, se a introdução dos conteúdos é feita através de tarefas de natureza exploratória, privilegiando-se a discussão coletiva e a reflexão, então a abordagem escolhida é a de ensino exploratório. É importante ainda mencionar que estas duas estratégias não são mutuamente exclusivas, no sentido em que, uma vez optando por lecionar utilizando o ensino exploratório, o professor não fica impossibilitado de recorrer à exposição teórica ou à realização de exercícios para praticar.

A ideia central envolvida na minha intervenção foi a de que o raciocínio matemático presidisse à construção do conhecimento relativo à Unidade Didática, ou seja, pretendia que fossem os alunos, através das tarefas propostas, a chegar aos resultados e propriedades do capítulo em questão. Na secção seguinte, que concerne às tarefas utilizadas, terei oportunidade de aprofundar melhor este assunto.

Posto isto, e tendo em conta a minha problemática e a turma em estudo, optei por uma abordagem de ensino exploratório, uma vez que foi dada uma maior ênfase a tarefas de natureza exploratória, com as aulas predominantemente centradas na atividade dos alunos, e, onde foram promovidas discussões coletivas e estimulados diferentes níveis de comunicação matemática (escrita e oral). Contudo, os problemas e exercícios também foram contemplados nos meus planos, uma vez que com a sua realização são atingidos outros objetivos de aprendizagem (conforme capítulo 2), para além de que, documentos de ordem curricular, como é exemplo o programa e metas do EB (MEC, 2013), orientam no sentido de ser promovida a resolução de problemas. Tentei, assim, que houvesse uma grande diversificação das propostas de trabalho que foram apresentadas aos alunos, tendo sido intencionalmente concebidas diferentes tarefas para a aprendizagem da Trigonometria pela turma.

Para que esta abordagem de ensino fosse bem-sucedida, foi condição necessária o envolvimento dos alunos naquilo que estava a ser tratado, exigindo, ainda, uma constante análise e reflexão por parte destes, sobre o conteúdo em questão. Assim, tal como corrobora Canavarro (2011): "O ensino exploratório da Matemática defende que os alunos aprendem a partir do trabalho sério que realizam com tarefas valiosas que fazem emergir a necessidade ou vantagem das ideias matemáticas que são sistematizadas em discussão colectiva" (p.11).

Desta feita, as aulas eram divididas em três grandes momentos: introdução da tarefa; realização da tarefa proposta; discussão e síntese final (Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas & Ferreira, 1998). No primeiro momento, apresentava o trabalho que deveria ser realizado pelos alunos, e, no caso de serem tarefas matemáticas que pudessem gerar mais confusão, fazia determinadas clarificações antes dos alunos iniciarem a sua resolução. Em relação ao segundo momento, e para qual, por norma, era atribuído a maior fatia de tempo, objetiva-se que os alunos realizassem, e posteriormente, refletissem, naquilo que estava a ser proposto para poderem apresentar as conclusões e dúvidas a que tinham chegado. À medida que os alunos iam trabalhando, ia circulando pela sala, não só para auxiliar alguém ou algum grupo que estivesse "bloqueado", mas também, para me permitir perceber que resoluções tinham emergido e quais me interessava expor para toda a turma, para que no terceiro momento, de discussão em grande grupo, essas conclusões e dúvidas pudessem ser trazidas para o quadro, promovendo um debate acerca das mesmas.

Tentei que os todos os alunos que queriam ir ao quadro, explicassem o que tinham feito para os colegas, principalmente, quando a resolução apresentada estava errada (o que era logo notado por alguns deles), de forma a que, não só o aluno que foi ao quadro explicar, percebesse o que tinha feito e que os argumentos apresentados não estavam corretos, mas também, porque essas resoluções apresentavam determinados pontos sobre os quais era necessário chamar à atenção, seja porque muitos colegas cometeram o mesmo erro, seja por serem ótimas oportunidades para serem feitas salvaguardas de grande relevância. Tal como nos apontam Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas e Ferreira (1998): "A discussão final é, em geral, um bom momento para promover uma visão geral dos vários aspectos da situação e das diversas estratégias que podem ser usadas para a explorar" (p.62). Então, o papel da professora foi, fundamentalmente, de apoio à realização destas tarefas e, posteriormente, sistematização dos conceitos matemáticos envolvidos nas mesmas, de forma a garantir que aquilo que era essencial que os alunos aprendessem ficasse efetivamente sabido e registado no caderno diário, levando-nos ao momento da síntese: este é um momento crucial, porque é aqui que todas as questões levantadas durante a discussão ficam "arrumadas". Mais: o registo escrito dessas mesmas conclusões permite fazer um reforço daquilo foi visto, clarificando, ainda, eventuais dúvidas:

> Uma fase de sistematização (summing-up) e de reflexão com toda a turma (…) É um meio indispensável para assegurar um grau apropriado de aprendizagem partilhada, de uso comum da linguagem e dos símbolos, de negociações sobre o papel e o potencial do trabalho realizado e da sua relação com tarefas anteriores. (Christiansen & Walter 1986, citado em Ponte 2017, p.4)

Assim, esta estratégia de ensino requer que o professor desempenhe uma multiplicidade de papéis no decorrer da sua prática, como indicam Ponte, Oliveira, Brunheira, Varandas e Ferreira (1998):

> (…) o professor tem um papel decisivo no processo de ensino-aprendizagem. Ele tem de ser capaz de propor aos alunos uma diversidade de tarefas de modo a atingir os diversos objectivos curriculares. Tem de se preocupar tanto com a aprendizagem dos conteúdos matemáticos propriamente ditos como com o desenvolvimento da capacidade geral de aprender (…). Tem de ser capaz de equilibrar os momentos de acção com os momentos de reflexão, ajudando os alunos a construir os conceitos matemáticos (…). (p.42)

Esta pluralidade de ações que o professor deve realizar para que este tipo de abordagem de ensino seja bem conseguida está, em grande medida, dependente da planificação que é feita, ou seja, "Quanto mais detalhado for o plano de aula, quanto mais pensado e refletido for o trabalho de preparação, maior capacidade terá o professor de ajustar esse plano em função dos acontecimentos e mesmo de improvisar." (Ponte, Quaresma & Pereira, 2015, p. 34). Portanto, esta estratégia de ensino acarreta imensa responsabilidade para o professor, não só ao nível lecionação da aula em si, como também na sua planificação, sendo que a completude da última é determinante para o sucesso da primeira.

Uma vez que a minha turma é, como já mencionei acima, muito participativa e interessada, creio que esta abordagem potenciou os aspetos positivos advindos do entusiamo demonstrado pelos alunos e minimizou os aspetos negativos, como é exemplo a conversa descontextualizada da aula.

3.4.2. Modos de trabalho

Durante as minhas aulas, foram experimentados diferentes modos de trabalho: tive aulas onde os alunos trabalharam individualmente; aulas onde alunos trabalharam colaborativamente em pares ou em grupos de três; e, sempre que surgiam situações novas como sejam, a ausência de aluno(s) ou a modificação da planta de sala de aula, por decisão da diretora de turma, impunha-se um novo método de trabalho e/ou a reformulação nos grupos de dois ou três elementos.

Pela grande parte do tempo da minha intervenção, a turma tinha uma planta de sala de aula onde os alunos estavam todos separados, ou seja, sentados em carteiras, de forma unitária. Nessa altura, na maioria das minhas aulas, os alunos foram colocados, por mim, a pares ou em grupos de três elementos, uma vez que este tipo de trabalho desenvolve uma série de competências que são fundamentais, como defende Nunes (1996): "(…) em pequenos grupos, os alunos mostram-se mais confiantes, autónomos e persistentes", para além disso, "(…) os alunos podem aprender a tornar mais clara a ideia que tentam transmitir; podem aprender a fazer críticas; podem aprender a ser bons ouvintes" (pp. 2-3). Segundo este autor, este modo de trabalho permite que todos os alunos saiam beneficiados uma vez que "a interação com os colegas fornece oportunidade para um desafiar frequente do pensamento de cada um, condição para auxiliar os alunos a construírem uma compreensão do que é a matemática" (p.2) e também porque os alunos quando colocados a trabalhar desta forma sentem-se mais à vontade para exporem as suas ideias ao grupo, sem medo de errarem ou de sugerirem algo menos correto.

É necessário salientar que estes grupos foram formados por mim, tendo por base a observação direta que faço da turma, no geral, e dos alunos, de forma particular, levando em conta aspetos como relações interpessoais e postura em sala de aula. Houve alguns alunos que faltaram em diferentes aulas, o que me obrigou a reformular os grupos, para essa aula, existindo grupos que não se mantiveram do princípio ao fim da intervenção. Também pelo desajuste no funcionamento de determinados pares, tiveram de ser feitos rearranjos dos mesmos no decorrer da minha intervenção, de forma que o trabalho colaborativo fosse um propiciador de trabalho e não de conversa paralela. De forma geral, este modo de trabalho revelou-se muito positivo e significativo, principalmente para os alunos que evidenciavam mais dificuldades na disciplina, como atestam os seus resultados académicos.

Em partes de algumas aulas, ou nas aulas de apenas 45 minutos, optei por deixar prevalecer a planta inicial, e, portanto, era potenciado o trabalho individual, não só por uma questão de economia de tempo, mas também, porque, este tipo de trabalho permite desenvolver competências tão importantes como concentração e reflexão (Ponte & Mata-Pereira, 2018).

Quando a planta de sala de aula mudou, as carteiras ficaram dispostas em forma de U, tendo os grupos formados por mim, na sua generalidade, sido preservados. Esta disposição da sala de aula permitiu-me um contacto muito mais fácil com qualquer elemento da turma, e possibilitou, também, que os alunos comunicassem de forma mais proficiente entre si e com a professora.

Apesar da maioria dos grupos se ter mantido junto com esta nova disposição da sala, esta situação fez com que os alunos trabalhassem não só intra-grupo, mas também, inter-grupo, isto é, eles iam resolvendo as tarefas e discutindo, ora com o colega do lado que pertencia ao seu grupo, ora com o colega do outro lado que pertencia a outro grupo, o que lhes permitiu enriquecer as suas resoluções e, com maior facilidade, perceberem onde e porque tinham errado.

Com as diferentes mudanças, compreendi que o modo de trabalho mais adequado, no caso desta turma, é aquele que não se repete constantemente, ou seja, a renovação frequente, mas ponderada, na forma de trabalho influi muito positivamente na postura dos alunos na sala de aula e, consequentemente, no trabalho produzido.

3.4.3. Recursos utilizados

No que se refere aos materiais, os mais utilizados foram o manual escolar e a calculadora científica. O manual escolar foi fundamental, visto que, é por ele que os alunos consolidam os seus conhecimentos, não só teoricamente, mas também de forma prática, dada a vasta lista de tarefas propostas, sendo este o meio predileto dos alunos para estudar para os momentos de avaliação. A calculadora científica também foi um recurso muito frequente já que, é dada uma grande importância a esta no ensino-aprendizagem deste tópico por parte dos documentos curriculares, existindo diversos descritores das metas curriculares que lhe são dedicados: "11.13. Utilizar uma tabela ou uma calculadora para determinar o valor (exato ou aproximado) da amplitude de um ângulo agudo a partir de uma das suas razões trigonométricas." (MEC, 2013, p.76)

Foram também pensadas diversas fichas de trabalho, contemplando diferentes tarefas, que pelo destaque que merecem nesta unidade, são apresentadas em secção autónoma (consultar a secção referente às tarefas propostas). Aquando a planificação desta unidade, as fichas foram elaboradas no sentido de complementar o conteúdo do manual, permitindo atingir outros objetivos, explorando de forma mais profunda e direcionada para o estudo em questão, do que aquilo que era apresentado no manual dos alunos.

Tendo em conta que vivemos numa sociedade cada vez mais tecnologicamente dependente, e dado que os alunos já são um produto desta sociedade, aliar as tecnologias à Unidade Didática não só faz todo o sentido como era imperativo, como referem Amado e Carreira (2008): "A tecnologia, se for integrada de forma inteligente com o currículo e articulada com metodologias convenientes, produz ganhos de aprendizagem reais e visíveis" (p.1).

A introdução da tecnologia em sala de aula pode ser percecionada de dois pontos de vista diferentes: funcional e pedagógico. A diferença entre ambos estão no papel que é atribuído ao aluno na utilização desta tecnologia: enquanto que do ponto de vista funcional a utilização está circunscrita ao professor, sendo o aluno um agente passivo; na perspetiva pedagógica o aluno toma um papel ativo na sua utilização, apropriando-se das ferramentas necessárias para essa utilização (Amado & Carreira, 2008). Assim, considerando o que acabou de ser mencionado, os recursos tecnológicos utilizados em sala de aula assumiram ambas as perspetivas.

O *software* Geogebra, apesar de utilizado uma única vez, foi precioso na medida em que garantiu o rigor e a precisão necessários, poupando tempo nas construções, para que os alunos pudessem observar a invariância das razões trigonométricas (ficha 13). Tornar a tecnologia um aliado do processo ensino-aprendizagem é incorporar uma ferramenta que é usual no cotidiano dos alunos (tablet) ao serviço da Matemática, para além de que a sua utilização nesta tarefa específica, permitiu que os alunos conjeturassem à vontade para conseguirem responder às perguntas feitas de forma mais completa possível, sem nunca perderem o rigor matemático exigido, assim, como reforçam Fernandes e Viseu (2011) "com o recurso ao GeoGebra foram proporcionadas condições para que os alunos pudessem formular, testar e explorar as suas conjecturas" (p.11), logo o GeoGebra foi "como um elemento mediador na construção do conhecimento matemático dos alunos" (p.11), assumindo uma perspetiva pedagógica.

Para as aulas onde foram introduzidos novos conceitos, o recurso a apresentações em *PowerPoint* (consultar anexos), facilitaram o trabalho, possibilitando, também, uma economia no tempo, porque, de outra forma, teriam de ser ditados alguns trechos, e a sua repetição poderia consumir mais minutos de aula. Há que ainda acrescentar que estas apresentações eram intercaladas com questionamentos aos alunos, existindo uma constante interação com a turma, à medida que os slides iam sendo expostos. A opção pela sua utilização prendeu-se, também, com aspetos relacionados com a clareza que as apresentações permitiam. Por exemplo, quando foram lecionados os conteúdos referentes à utilização da máquina de calcular e à tabela trigonométrica, a apresentação possibilitou ilustrar para todos os alunos, de forma objetiva, como deveriam ser utilizados estes instrumentos de trabalho, já que tinha escrito explicitamente e em letras grandes, quais as teclas que deveriam ser escolhidas, para todo o tipo de máquinas, bem como, como deveria ser feita a consulta da tabela trigonométrica. Portanto, as apresentações assumiram uma perspetiva funcional.

3.5. Tarefas propostas

Nesta secção do trabalho, apresentarei, por ordem cronológica, as tarefas utilizadas na Unidade Didática. No final de cada tarefa, indicarei a sua tipologia de acordo com o quadro 2.3., presente no capítulo dois, que teve como referências principais Swan (2017) e Ponte (2005).

Baseando-me na minha problemática e na abordagem de ensino por mim escolhida, tarefas de natureza exploratória desempenharam um importante papel na minha intervenção, no entanto, dado que a Trigonometria é um tópico onde a resolução de problemas é essencial, este é um tipo de tarefa que também apresentei. Propus, ainda, tarefas para consolidação de aprendizagens já que estas são de importância fundamental na aprendizagem de qualquer conceito dado que o "bom domínio de rotinas liberta uma atenção consciente para focar os aspetos da tarefa que são novidades ou que são problemáticos" (Cockroft,1982, citado em Swan, 2017, p.68).

Antes de detalhar as tarefas propostas, quero, reforçar o facto de que durante a minha intervenção, o manual escolar teve um papel muito presente, sendo que para lecionação desta Unidade Didática houve uma complementaridade entre as fichas de trabalho propositadamente pensadas para estes alunos e o manual escolar. Então, também destacarei algumas tarefas propostas desse instrumento de trabalho, sublinhando que a designação utilizada pelo mesmo foi adotada por mim para me referir às suas tarefas. O manual escolar intercala os conteúdos de cada capítulo com alguns exercícios e demonstrações, denominando estas tarefas de exercícios ou de atividades. Depois de apresentados todos os conteúdos, o manual possui uma secção, à qual dá o nome de "Para consolidar", onde inclui uma lista com todo o tipo de tarefas que se espera que os alunos já saibam resolver, designando-as de exercícios.

Quero ainda mencionar que as tarefas que estão classificadas como (d) apresentam essa tipologia pelo facto de terem sido propostas com a intenção de que os alunos aproveitassem o facto de estarem a trabalhar em grupos para poderem debater as suas ideias, analisando os vários cenários possíveis para a resolução da questão, incluindo a formulação de conjeturas e a sua validação. Este debate intra-grupo seria depois aproveitado para a discussão em grande grupo com toda a turma, constituindo-se este como mais um momento para analisar e interpretar procedimentos e estratégias.

As fichas de trabalho desta Unidade Didática seguem a numeração começada desde o início do ano letivo, pela professora titular da turma, daí a primeira ficha que apresento ser a ficha número 10.

Privilegiando a organização desta secção e de forma a que a compreensão da mesma seja facilitada, apresento, de seguida, um quadro (3.3.) onde estão listadas todas as tarefas propostas e respetivas tipologias.

Quadro 3.3 *Tipificação das tarefas propostas aos alunos segundo o quadro 2.3.*

Tarefa	Tipificação
Ficha 10	(1); (a)
Ficha 11	1ª tarefa: (2); (b)
	Restantes tarefas: (1); (a); (b)
Ficha 12	(2); (b); (d)
Atividade 6 e Exercício 7 da página 47	(b); (d)
Atividade 5 da página 47	(b); (d)
Atividade 8 e Exercício 9 da página 48	(1); (a); (b)
Atividade 10 da página 49	(1); (a); (d)
Exercício 13 da página 50	(4); (c); (d)
Atividade 14 da página 51	(5); (c); (d)
Ficha 13 e Atividade 29 da página 55	1ª tarefa da ficha: (b); (d)
	2ª e 3ª tarefa da ficha: (2); (b); (d)
	Atividade 29 da página 55 (4ª tarefa da ficha): (b); (d)
Exercício 31 da página 56	(1); (a); (b)
Exercício 43 da página 58	(b); (d)
Exercício 32 da página 57	(1); (a)
Atividade 44 da página 59	(2); (b); (d)
Atividade 45 da página 59	(2); (b); (d)
Ficha 13A	1ª tarefa: (1); (a); (d)
	2ª tarefa: (1); (a); (b); (d)
	3ª tarefa: (1); (a)
	4ª tarefa: (5); (c); (d)
Ficha 14	(5); (c)
Ficha 15	Tarefa 1: (1); (a); (b); (d)

	Tarefa 2: (5); (c); (d)
	Tarefa 3: (a); (b); (d)
	Tarefas 4, 6, 9: (5); (c)
	Tarefas 5, 8: (b)
	Tarefas 7, 10: (4); (c)

Ficha 10 (Anexo 1)

Esta ficha foi concebida com o intuito de os alunos poderem revisitar o tópico referente às semelhanças de triângulos, já abordado em anos anteriores. A primeira tarefa da ficha serviria de motivação para o início deste estudo, tendo-se pensado em incluir a história da Matemática na apresentação da tarefa, não só pela importância desta vertente da Matemática, mas também, como forma de contextualizar a questão, assim, estavam a adquirir, simultaneamente, cultura e conhecimento matemático relativo a este tópico. Como é representado um episódio da história da Matemática, a altura da pirâmide é a verdadeira, tendo sido as outras medidas de comprimento pensadas de forma de que os cálculos que os alunos tivessem que efetuar respeitassem este dado. Apesar de o enunciado não sugerir a utilização da semelhança de triângulos para a resolução desta primeira tarefa – teriam de ser os alunos, pela observação que fizeram da figura e pelos conhecimentos adquiridos, a conseguir compreender que conhecimentos poderiam utilizar – , a segunda parte da ficha, que diz respeito às tarefas 1 a 3, possibilitou que os alunos pudessem recordar os critérios de semelhança de triângulos e a forma de os aplicar, como meio de justificação da proporcionalidade direta entre os lados dos triângulos. Então, a segunda página, foi resolvida, depois de terem sido recordados os três critérios de semelhança de triângulos. Dado que os conhecimentos matemáticos envolvidos na resolução da ficha dizem respeito a conteúdos lecionados em anos anteriores e que se pretendia que os alunos recordassem esses conteúdos, através da sua aplicação, as tarefas apresentadas podem ser classificadas como (1); (a).

Ficha 11 (Anexo 2)

Para esta ficha pretendia-se introduzir as razões trigonométricas. Como era o primeiro contacto dos alunos com este tópico, foi, primeiramente, recordada alguma nomenclatura referente a triângulos retângulos, nomeadamente a que concerne às designações dos comprimentos de cada lado do triângulo. Assim, a primeira tarefa da ficha tinha por objetivo que os alunos conseguissem escrever os quocientes, cujos seriam atribuídas as denominações corretas – o nome das razões trigonométricas, em discussão em grande grupo. Esta primeira tarefa poderia ser classificada como (2); (b), tendo em conta o seu caráter aberto e desafio reduzido, uma vez que os alunos não conseguiriam designar os quocientes, apesar de os conseguirem escrever. Já as tarefas 2 e 3 da ficha – que correspondiam à segunda página da mesma –, visavam a aplicação à prática daquilo que tinha acabado de ser visto teoricamente. Sendo que na primeira tarefa eram conhecidos todos os comprimentos necessários para efetuar os cálculos, e na segunda tarefa isso já não acontecia, o que obrigou os alunos a terem de mobilizar outros conhecimentos, como propriedades de triângulos e Teorema de Pitágoras, para conseguirem dar resposta ao pedido. Classificaria estas duas tarefas como (1); (a). Uma vez que este foi o primeiro contacto dos alunos com as razões trigonométricas, tendo estes que conseguir distingui-las para escreverem corretamente o quociente respeito, esta também pode ser uma tarefa (b).

Esta ficha também permitiu recordar a notação e simbologia matemática utilizada para designar ângulos, como são exemplo as letras gregas.

Ficha 12 (Anexo 3)

Na preparação da Unidade Didática, esta foi uma das primeiras fichas a ser idealizada, pois, a verificação, por parte dos alunos, que as razões trigonométricas dependem unicamente do ângulo em causa, é crucial para a construção de uma aprendizagem significativa na Trigonometria. As três primeiras tarefas da ficha pretendiam, com o auxílio do Geogebra, que os alunos atestassem a invariância das razões trigonométricas, por experimentação. Os alunos, primeiramente, tinham de registar o valor das razões que surgia no visor do *tablet*, após terem escolhido o triângulo que pretendia, e depois de movimentar determinados pontos (conforme o solicitado na ficha) iriam observar como se alteravam, ou não, as razões trigonométricas, alterações essas que teriam de justificar mediante as modificações que se estavam a efetuar nos comprimentos dos lados.

A última tarefa proposta era apenas uma “rampa de lançamento” para a atividade 6 e o exercício 7, ambos da página 47 do manual dos alunos. Esta tarefa pretendia que os alunos conjeturassem acerca do intervalo no qual as razões trigonométricas podem variar. A ideia era que, como estavam a utilizar o Geogebra, os alunos conseguiram obter tantos triângulos quantos quisessem e, portanto, que fossem tentando, através da movimentação dos pontos, concluir o intervalo de variação das razões trigonométricas. A sua justificação seria feita através da realização das tarefas do manual supramencionadas.

De acordo com o aqui explicitado, esta ficha contemplava unicamente tarefas do tipo (2); (b); (d).

Atividade 6 e Exercício 7 da página 47 (Anexo 4)

Estas tarefas visavam a validação ou refutação das conjeturas efetuadas pelos alunos na última tarefa da ficha 12. Tarefas como estas assumem uma vital importância na aprendizagem dos alunos, já que, é através delas que estes ficam efetivamente convencidos da veracidade das suas afirmações. Ambas as tarefas se apoiam numa construção de um triângulo retângulo, no entanto, o exercício 6, ao contrário do que sucede com a atividade 7, conduz o pensamento dos alunos, por meio de várias perguntas, no sentido de mais facilmente conseguirem justificar aquilo que conjeturaram. A atividade 6 permite concluir que o valor do seno e do cosseno de um ângulo agudo se encontra entre zero e um. Já o exercício 7 possibilita justificar que a tangente de um ângulo agudo toma qualquer valor positivo. Estas tarefas podem ser classificadas como (b); (d).

Atividade 5 da página 47 (Anexo 5)

Esta tarefa foi o primeiro momento em que os alunos se confrontaram com a necessidade de demonstrar um resultado, ou seja, até este instante, as tarefas propostas utilizavam uma linguagem mais "ligeira" no que toca às demonstrações de propriedades, usando expressões como "justifica o teu raciocínio" ou "completa com as letras da figura", ou seja, apoiando sempre o aluno na construção da prova. Desta forma, a meu ver, procurou-se criar a intuição necessária no aluno para o desenvolvimento da demonstração, tornando a sua necessidade implícita. No manual dos alunos, esta tarefa tem como título "Demonstrar", surgindo, pela primeira vez, a expressão "prova que". Esta mudança de vocabulário evidencia bem esta transição.

Apesar da tarefa contemplar três alíneas, após a realização da primeira, as outras duas seguiram o mesmo raciocínio, uma vez que era pedido para demonstrar, para as três razões trigonométricas, que ângulos de igual amplitude são iguais. Entende-se, então, que o objetivo desta tarefa era que os alunos realizassem a demonstração deste resultado, sendo que a compreensão da prova estava dependente da certeza da veracidade da propriedade e do entendimento de algumas das “regras” da lógica, por meio de argumentos que envolviam a semelhança de triângulos.

Assim, esta tarefa pode classificar-se como (b); (d).

Atividade 8 (Anexo 6) e Exercício 9 da página 48 (Anexo 7)

Estas duas tarefas visavam a familiarização dos alunos com a utilização de dois recursos muito importantes nesta Unidade Didática: a calculadora científica e a tabela trigonométrica. Apesar da atividade 8 pedir que os alunos utilizem, apenas, a calculadora científica, e o exercício 9 indicar, somente, o uso da tabela trigonométrica, sugeriu-se que os alunos em ambas as tarefas usassem ambos os recursos, de forma a se convencerem de que a única diferença entre os dois – quando falamos em valores aproximados do valor das razões trigonométricas –, tem que ver com o número de casas decimais apresentadas, pois quando queremos valores das razões trigonométricas com ângulos com amplitude com números decimas, a tabela não será o instrumento mais indicado, dado que só apresenta números naturais para os ângulos (agudos). Estas tarefas também permitiram introduzir $arcsen; arccos; arctg$, e a simbologia e notação a elas associadas, uma vez que, para além de se pedir o cálculo das razões trigonométricas, também pode ser pedido o valor do ângulo, sabendo o valor das razões trigonométricas.

É relevante, sublinhar, que a primeira alínea da atividade 8 mostrava a sua resolução para os alunos, explicando a diferença entre pressionar a tecla sen e a tecla $arcsen$. A acrescentar a isto, já tinha sido feita uma explicação aos alunos, com o auxílio de uma apresentação *PowerPoint*, por parte da professora, tendo estes, feito o subsequente registo no caderno diário. Assim, esta tarefa, por aquilo que aqui foi argumentado, pode ser considerada como (1); (a); (b).

Atividade 10 da página 49 (Anexo 8)

Esta tarefa, que no livro dos alunos, tem o título “Calcular elementos de um triângulo retângulo”, tem por objetivo que os alunos, num contexto puramente matemático, determinem o valor dos elementos de um triângulo, conforme a indicação feita. Relembre-se que os elementos de um triângulo são os comprimentos dos seus lados e as amplitudes dos seus ângulos. Será igualmente importante referir que este é o primeiro momento em que os alunos são confrontados com tarefas deste género.

A primeira alínea da tarefa apresenta a resolução para que os alunos compreendam os passos que foram dados, sendo apoiada por perguntas como "Quais são os dados do problema?" ou ainda "O que queremos determinar?". A segunda alínea segue os mesmos moldes que a primeira, sendo que é pedido que os alunos completam alguns dos espaços com o símbolo "?" para que a resolução seja terminada. Estas duas alíneas são muito orientadas, o que, nesta fase da aprendizagem da Unidade Didática, é compreensível.

Já a terceira alínea, apesar de não ter completamento de espaços, ou estar resolvida, está, igualmente, muito direcionada, uma vez que apresenta uma sugestão. A sugestão passa por, precisamente, os alunos questionarem-se com algumas perguntas-chave para a resolução deste tipo de tarefas.

Finalmente a última alínea, apresenta duas subalíneas, sendo que a primeira destas já apresenta a sua resolução, uma vez que é pedida a determinação de um ângulo do triângulo. A segunda subalínea mostra aos alunos que, quando estamos perante um triângulo retângulo, conseguimos recorrer a dois conceitos fundamentais para determinar um comprimento em falta: o Teorema de Pitágoras, que eles já conheciam e a Trigonometria, que agora estão a aprender.

A constante presença das perguntas-chave evidencia aos alunos a necessidade de compreender bem aquilo que são os dados e aquilo que é pedido, sabendo relacioná-los de forma a conseguirem aplicar os conceitos trigonométricos. Assim, pelo que aqui foi mencionado, esta tarefa, pode ser classificada como (1); (a); (d).

Exercício 13 da página 50 (Anexo 9)

Esta tarefa segue a mesma lógica que a anterior (atividade 10): resolução de um triângulo retângulo, ou seja, determinação dos elementos de um triângulo. A diferença entre esta e a anterior está orientação que não é dada nesta última, isto é, nesta tarefa é apresentado um triângulo e pede-se que sejam calculadas as amplitudes dos ângulos e os comprimentos dos lados em falta. É de sublinhar que o triângulo da tarefa não é retângulo, tendo os alunos, a partir dos dados fornecidos, conseguir obter um triângulo retângulo, para conseguirem resolver a situação com os conhecimentos adquiridos. Logo, a dificuldade da tarefa estava na obtenção do triângulo retângulo, apresentando a devida justificação. A partir daqui, bastava fazer a aplicação das razões trigonométricas para descobrir o que era pedido. De qualquer das formas a adoção de uma estratégia era essencial. Assim, esta tarefa pode classificar-se como (4); (c); (d).

Atividade 14 da página 51 (Anexo 10)

No manual dos alunos, esta tarefa tem por título: “Determinar distâncias a locais inacessíveis”. No fundo, aquilo que se pretende é que sejam resolvidos triângulos, num contexto de semi-realidade ou de realidade, para que os alunos conseguissem fazer a aplicação da Trigonometria a contextos que não os puramente matemáticos, entendendo, assim, a utilidade desta área da matemática.

Esta “atividade” do manual apresenta seis alíneas, em que o nível de dificuldade vai aumentando gradualmente, à medida que os alunos passam de uma alínea para outra.

Para todas as alíneas, os alunos deveriam apresentar uma resposta, dado que estão a resolver problemas com um contexto que não o matemático, logo os cálculos que eles realizam não respondem às perguntas formuladas. Apresentando-se este como, também, um dos objetivos da tarefa.

A primeira alínea pede para ser calculada a largura de um rio, a qual representa o comprimento de um dos lados de um triângulo retângulo. Este cálculo é a aplicação direta das razões trigonométricas, ligando-se com aquilo que os alunos estiveram a trabalhar nas duas tarefas imediatamente anteriores a esta.

A segunda e a terceira alíneas dizem respeito ao mesmo enunciado, sendo que este exige que os alunos consigam fazer a interpretação das perguntas de forma a conseguirem compreender que dados são fornecidos e aquilo que se pretende que eles calculem. A terceira alínea (à semelhança do que já tinha acontecido na atividade 10) volta a sublinhar que sempre que surge um triângulo retângulo, conhecendo dois dos comprimentos dos seus lados, é possível aplicar quer o Teorema de Pitágoras, quer a Trigonometria, na sua resolução.

A quarta e quinta alíneas propostas pedem que sejam calculadas as alturas de dois edifícios, primeiramente do Padrão dos Descobrimentos e depois de um qualquer edifício. São para isso utilizados dois triângulos retângulos. A ideia é que os alunos compreendam que para que conseguissem calcular a altura de edifício (nestes casos em específico) precisam de aplicar a Trigonometria em dois triângulos retângulos diferentes, sendo a altura do monumento dada pela soma desses dois comprimentos. É nesta alínea que surge uma outra questão, que se prende com as casas decimais. Quando no resultado final é pedido um determinado número de casas decimais, é importante que os alunos compreendam que para que o resultado possa ser o mais fidedigno possível é necessário que nos cálculos intermédios preservem pelo menos mais duas casas do que as que são pedidas no final. Este constitui, também, um dos objetivos desta tarefa: compreender o número de casas decimais a preservar nos cálculos intermédios.

A última alínea já apresenta uma figura composta por três triângulos, dois deles retângulos. São, igualmente, apresentadas duas incógnitas, estando a determinação de uma dependente da outra, o que impele à utilização de um sistema com duas equações a duas incógnitas, sendo que as duas equações envolvem razões trigonométricas. Esta não é uma tarefa de nível de desafio reduzido, não só pela dificuldade no que se refere ao equacionar do sistema, como pela própria resolução do mesmo. De facto, há que ter em consideração que a figura teria de ser muito bem analisada pelos alunos para que os triângulos fossem devidamente escolhidos e para que a resposta fosse a correta.

Tendo tudo isto em conta, todas as alíneas desta tarefa podem ser classificadas como (5); (c); (d).

Ficha 13 (Anexo 11) e Atividade 29 da página 55 (Anexo 12)

A ficha 13 tinha por objetivo que os alunos fossem introduzidos às relações entre as razões trigonométricas de um mesmo ângulo agudo, nomeadamente à Fórmula Fundamental da Trigonometria (FFT). Eram apresentados três triângulos retângulos sobre os quais incidiam as perguntas para os alunos responderem.

A primeira pergunta da ficha pretendia que os alunos provassem que os triângulos em causa eram retângulos (mais uma vez, era, implicitamente, mencionada a importância de os triângulos serem retângulos para que o cálculo trigonométrico pudesse ser usado), para isso, era necessária a utilização do recíproco do Teorema de Pitágoras, constituindo-se, este como o primeiro objetivo da ficha. Assim, pretendia-se que os alunos compreendessem a diferença entre o Teorema de Pitágoras e o seu recíproco e, consequentemente, quando deveria ser aplicado um e outro, remetendo-os, novamente, para questões ligadas à lógica matemática e às suas "regras". Para que o recíproco pudesse ser aplicado, os alunos precisavam, ainda, de entender que a hipotenusa é sempre o maior comprimento, e assim que esta fica definida, os catetos estão automaticamente determinados. Esta tarefa é pode ser tipificada como (b); (d).

Na segunda alínea eram pedidos os cálculos dos valores das razões trigonométricas para cada um dos triângulos, e de seguida, que os alunos comparassem o valor da tangente com o valor do quociente entre o seno e cosseno, do mesmo ângulo. Objetivava-se a conclusão, por parte dos alunos, da igualdade entre esses os valores, criando a intuição necessária para a demonstração que se seguiria. Esta é, portanto, uma tarefa (2); (b); (d).

Para a terceira alínea era perguntado o valor da soma do quadrado do seno com o quadrado do cosseno, de todos os ângulos assinalados e, à semelhança da alínea anterior, pretendia-se criar uma intuição, neste caso acerca da FFT, para os alunos a conseguirem concluir. Assim, esta também é uma tarefa (2); (b); (d).

Na última pergunta os alunos eram remetidos para o seu manual, onde a atividade 29 iria apresentar a demonstração de ambas as relações que tinham sido conjeturadas e vistas de forma particular na segunda e na terceira perguntas desta ficha. Esta atividade 29 apresenta duas alíneas, sendo a primeira destinada à demonstração da FFT e a segunda à relação entre as três razões trigonométricas. A demonstração da FFT está mais direcionada, já que os alunos teriam apenas de preencher alguns espaços em branco, enquanto o mesmo não sucede na segunda demonstração. Esta tarefa é (b); (d).

Estas tarefas (ficha 13 e atividade 29) são um bom exemplo da complementaridade – acima mencionada –, entre o manual dos alunos e as fichas intencionalmente concebidas.

Exercício 31 da página 56 (Anexo 13)

Depois de serem introduzidas as relações entre as razões trigonométricas de um mesmo ângulo agudo, e de os alunos terem tido oportunidade de as registar no caderno diário e de as demonstrar, impunha-se a aplicação das mesmas, de forma que estes pudessem observar a sua importância. Assim, esta é a primeira tarefa que surge com esse propósito.

Com esta tarefa pretendia-se que os alunos percebessem que conhecendo uma das razões trigonométricas, e pela utilização de uma ou das duas relações observadas, conseguem determinar o valor exato das outras duas razões trigonométricas.

Nesta tarefa era conhecido o valor do cosseno de um ângulo agudo e na primeira alínea era pedido o valor do seno desse mesmo ângulo, o que obrigaria os alunos a utilizar a FFT; e na segunda alínea era pedido o valor da tangente desse mesmo ângulo, o que os levaria a utilizar a relação entre as três razões trigonométricas. Estas tarefas são dos tipos (1); (a).

Note-se que, existia um objetivo implicitamente estipulado: quando é aplicada a FFT, a determinada altura surge uma raiz quadrada, logo dois valores (simétricos), e os alunos têm de saber justificar a exclusão do valor negativo, tendo por base os seus conhecimentos acerca da Trigonometria num triângulo retângulo, portanto, esta é, também, uma tarefa do tipo (b).

Exercício 43 da página 58 (Anexo 14)

Dando continuidade à aplicação das relações entre as razões trigonométricas, interessava mostrar aos alunos que, para além destas relações permitirem a determinação do valor exato de razões trigonométricas, conhecendo o valor de uma delas; estas relações possibilitam, também, a realização de demonstrações. Esta tarefa apresenta duas alíneas, sendo que em ambas é pedido que os alunos efetuem a demonstração do que está enunciado, assim, esta tarefa tinha por objetivo que os alunos, mediante a mobilização das relações entre as razões trigonométricas, conseguissem provar aquilo que é pedido.

Para a primeira alínea os alunos teriam de ser capazes de mobilizar os seus conhecimentos acerca dos casos notáveis, de forma a conseguirem “livrar-se” dos parêntesis, e só depois é que conseguiram utilizar as relações entre as razões trigonométricas que já conheciam.

Já a segunda alínea podia ser realizada por duas abordagens diferentes ao enunciado: ou se iniciava colocando ambos os membros com o mesmo denominador e depois utilizar-se-iam as relações entre as razões trigonométricas; ou, então, poder-se-ia começar por mobilizar as relações entre as razões trigonométricas e, depois, simplificar a expressão obtida.

Ambas as alíneas exigem dos alunos um domínio sobre os cálculos algébricos, de forma geral, e também, da Trigonometria, de forma mais particular. Desta feita, podemos tipificar esta tarefa como (b); (d).

Exercício 32 da página 57 (Anexo 15)

A exploração desta tarefa pretende pôr em confronto duas situações: utilização do valor exato e do valor aproximado das razões trigonométricas. Com a realização desta tarefa objetivava-se que os alunos percebessem que a utilização de um ou do outro valor depende, unicamente, da formulação da pergunta.

Esta tarefa é classificada como (1); (a).

Atividade 44 da página 59 (Anexo 16)

Com esta tarefa os alunos puderam relacionar o seno e o cosseno de ângulos complementares. A forma como a tarefa está construída permite que estes deduzam este resultado de uma forma muito natural.

A primeira pergunta da tarefa pede que seja justificada a razão pela qual os dois ângulos indicados são complementares, obrigando os alunos a mobilizarem esse conhecimento de anos anteriores, nomeadamente o conceito de complementaridade de ângulos e de soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo.

A segunda alínea prende-se mais com uma questão de formalização e de notação do que, propriamente, com os conceitos matemáticos envolvidos, já que os alunos devem escrever um ângulo em função de outro, utilizando as letras que a figura indica.

A terceira pergunta é a aplicação direta das definições de seno e cosseno de um ângulo, tendo os alunos, apenas, que perceber a que ângulo se refere $90° - \alpha$.

Espera-se que com a realização da terceira pergunta que a quarta alínea seja imediatamente respondida, tendo em conta o registo efetuado, chegando-se, assim, ao resultado esperado.

Baseando-me naquilo que aqui foi referido, esta é uma tarefa (2); (b); (d).

Atividade 45 da página 59 (Anexo 17)

Esta tarefa tem por objetivo a dedução dos valores exatos das razões trigonométricas do ângulo de $45°$. Note-se que o manual dos alunos tem uma outra tarefa que permite fazer a dedução dos valores exatos das razões trigonométricas dos ângulos de $30°$ e $60°$, completando, assim, a dedução dos valores exatos das razões trigonométricas dos chamados ângulos de referência, o que permite aglutinar tudo numa tabela com estes valores. Contudo, esta segunda tarefa não foi feita por uma questão de economia de tempo, acrescendo o facto de a sua realização não trazer nada de novo, já que os argumentos utilizados são em tudo análogos aos da atividade 45. A tarefa é acompanhada por um triângulo retângulo isósceles.

A primeira pergunta da tarefa pede para que os alunos justifiquem o valor da medida dos comprimentos dos lados apresentados tendo como argumentação o Teorema de Pitágoras e propriedades em triângulos.

A segunda alínea pede também uma justificação, mas neste caso, relativa ao valor das amplitudes dos ângulos num triângulo retângulo isósceles, pretendendo-se que os alunos aludam à soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo ou até aos ângulos complementares.

A última pergunta pede a determinação do valor das razões trigonométricas do ângulo de 45°, o que implica somente a aplicação da definição de cada razão trigonométrica. Nesta alínea há uma pequena subtileza que tem que ver com a racionalização dos denominadores, porque só fazendo a racionalização é que é possível obter os resultados que constam na tabela. Esta "atividade" pode-se classificar como (2); (b); (d).

Ficha 13A (Anexo 18)

Começo por mencionar que houve um problema com a numeração das fichas tendo originado a existência de duas fichas 13, daí esta estar designada por 13A.

Neste momento da intervenção, era oportuno começar a consolidar os conhecimentos lecionados até então, assim esta ficha tem por objetivo a concentração das tarefas mais usuais, destacando, para os alunos, perguntas que podem surgir em momentos de avaliação, seja interna ou externa.

A ficha tinha quatro tarefas, onde as três primeiras eram provenientes do manual dos alunos. A primeira dizia respeito à aplicação das razões trigonométricas com valores exatos, a segunda pedia que os alunos utilizassem as relações entre as razões trigonométricas, a terceira era a aplicação das razões trigonométricas num problema com contexto e a última foi retirada uma prova final do 3.º ciclo, com o intuito dos alunos se familiarizarem com os enunciados em provas externas. Em algumas destas tarefas era necessário que os alunos refletissem sobre qual a melhor abordagem para a resolver, tendo para isso que analisá-las devidamente. Assim, a primeira pergunta é dos tipos (1); (a); (d), a segunda pode classificar-se como (a); (b); (d), a terceira tarefa é dos tipos (1); (a) e a última classifica-se como (5); (c); (d).

Ficha 14 (Anexo 19)

Com quatro tarefas, esta ficha visava que os alunos pudessem contactar com outros problemas neste tema que têm surgido nas provas de avaliação externa. Todas as tarefas apresentadas são muito semelhantes à última que foi proposta na ficha 13A na medida em que são problemas de provas finais de 3.º Ciclo. Os alunos deveriam saber interpretar os dados fornecidos, retirando aqueles que mais convenientes à resolução da tarefa; perceber o que lhes estava a ser pedido; fazer a aplicação da

Trigonometria; e, por fim, dar resposta ao problema. Mais uma vez, é necessário para o sucesso da realização desta ficha, que os alunos apresentem à-vontade na realização de manipulações algébricas, e que consigam estabelecer conexões com os vários tópicos matemáticos, como são exemplo, propriedades de circunferências ou de triângulos. Também nesta ficha era pedido que os alunos analisassem cada pergunta para perceberem qual a estratégia mais adequada a cada uma.

Logo, todas as tarefas desta ficha são (5); (c).

Ficha 15 (Anexo 20)

Esta foi a última ficha proposta e que reuniu todo o tipo de tarefas mais relevantes para a aprendizagem da Trigonometria. Como já tive oportunidade de referir, a partir da ficha 13A, as fichas subsequentes serviriam para consolidar os conteúdos relativos à Trigonometria, tendo esta ficha reunindo um conjunto das tarefas mais importantes e interessantes no âmbito desta unidade. Esta ficha também pretendia promover o trabalho autónomo dos alunos, uma vez que eram dadas as soluções de cada uma das tarefas apresentadas.

A tarefa 1, que pode classificar-se como (1); (a); (b); (d), pede que os alunos determinem o valor exato das expressões solicitadas, começando por determinar o valor de cada uma das razões trigonométricas, utilizando o valor das razões trigonométricas dos ângulos de referência ou as relações entre as razões.

As tarefas 2, 4, 6 e 9 são (5); (c), permitindo que os alunos, através da Trigonometria, compreendam a sua utilidade na determinação de alturas de edifícios ou de distâncias inacessíveis. Todas as tarefas apresentam figuras compostas por mais do que um triângulo, sendo necessários que os alunos façam vários passos até chegarem à resposta do problema, tendo de mobilizar diversos conhecimentos, não só no campo da geometria, como da álgebra. No caso da tarefa 4 os alunos teriam de recorrer a um sistema para conseguirem dar-lhe resposta.

As tarefas 3, 7 e 10 possibilitavam, aos alunos, mobilizar diversos conhecimentos relacionados com a Trigonometria, mas também com as propriedades de triângulos e de outros polígonos, ou ainda ao Teorema de Pitágoras e o seu recíproco. A tarefa 3 é (a); (b) e as tarefas 7 e 10 são (4); (c).

As tarefas 5 e 8 são tarefas (b), o que, mais uma vez, impeliu os alunos à utilização das relações entre as razões trigonométricas, mostrando-lhes que com estas conseguem desenvolver um importante tipo de tarefa matemática.

As tarefas 2 e 3 ainda assumem a tipologia de (d) dado que tiveram oportunidade de serem discutidas em sala de aula.

Esta é uma ficha muito completa no que se refere à diversidade de tarefas propostas e que serviu, também, o propósito de preparação dos alunos para o momento de avaliação sumativa que se avizinhava: o teste escrito de avaliação.

3.6. Avaliação

Relativamente à avaliação, utilizei as duas modalidades da avaliação: a sumativa e a formativa.

No que diz respeito à avaliação formativa, considero que esta é importante para alicerçar todo o processo de ensino-aprendizagem, sendo que a sua prática no desenrolar da Unidade Didática permitiu que os alunos fizessem aquilo que é necessário quando se implementa uma estratégia de ensino exploratório: reflexão. Ou seja, à medida que os alunos iam produzindo trabalho, fui dando *feedback* sobre aquilo que eles realizaram, o que fez com que fossem ganhando confiança acerca dos seus conhecimentos e até mesmo sobre si próprios, permitindo-lhes confirmar mais amiúde se aquilo que estão a construir relativamente aos conteúdos lecionados, vai ao encontro daquilo que se pretende ou não, e neste último caso, tiveram, ainda, oportunidade para perceber o que está a falhar e corrigir aquilo que precisar de ser corrigido. Esta modalidade também me permitiu, enquanto professora, perceber como é que os alunos iam assimilando os tópicos matemáticos e redirecionar, caso fosse necessário, a planificação da unidade de forma que os alunos efetivamente aprendam. Tal como nos dizem Santos e Pinto (2018): "A avaliação formativa (…) usa as evidências para perceber onde o aluno está em termos de aprendizagem para tomar decisões no sentido de providenciar mais e melhores aprendizagens e para regular o ensino" (p. 509). Para realizar a avaliação formativa utilizei três instrumentos de avaliação: o *feedback escrito*; o questionamento oral e uma questão de aula. Analisemos cada um destes instrumentos.

O *feedback* escrito foi uma constante no decorrer de toda a Unidade Didática. Sempre que considerei oportuno, recolhia os trabalhos produzidos pelos alunos, em contexto de sala de aula ou quando indicava como trabalho para casa, de maneira a conseguir compreender o que tinham entendido do que tinha sido lecionado, permitindo-me analisar em que medida é que cada aluno precisava de ser apoiado na sua aprendizagem, escrevendo para que o aluno atentasse ou naquilo que escreveu, ou na forma como escreveu, ou ainda questioná-lo sobre o processo que utilizou. Esta prática revelou-se muito interessante, não só porque os alunos aderiram muito bem à mesma, já que, desde do início compreenderam que a recolha das suas resoluções não tinha outro intuito que não o de os poder auxiliar durante o processo ensino-aprendizagem da Trigonometria; mas também, e essencialmente, porque esta forma de comunicar com todos os alunos da turma possibilitou o estreitamento da ligação entre professora e alunos, o que, para quem não é a responsável da turma (como aconteceu neste caso), é uma forma de, com mais eficácia, conseguir chegar às dificuldades dos alunos. Para além dos comentários tecidos individualmente, este instrumento de avaliação é uma boa oportunidade para motivar os alunos, transmitindo-lhes confiança sobre o trabalho desenvolvido. (Santos & Pinto, 2018)

O questionamento oral foi usado em diversos momentos, quer em momentos de discussão em grande grupo, quer de apresentações de resoluções dos alunos no quadro. O uso deste instrumento está intrinsecamente ligado com a abordagem de ensino pela qual optei. O facto de ter escolhido o ensino exploratório, fez (como já tive oportunidade de explicitar acima) com que as aulas fossem divididas em três grandes momentos, sendo que dois deles são potenciadores da comunicação em sala de aula, nomeadamente, da comunicação no sentido professora-alunos. Estes momentos são muito importantes para perceber as conceções que os alunos formam acerca dos conteúdos lecionados, e fazer um eventual ajuste.

Já para a avaliação sumativa utilizei uma questão de aula (Anexo 21) e um teste escrito (Anexo 22). Esta outra modalidade mostra-se fundamental porque os alunos serão classificados no final do período com uma nota quantitativa que será resultante de várias parcelas, onde se incluem os testes escritos, com uma maior percentagem na classificação, e as questões de aula.

É a altura para abordar a questão de aula, dado que a inclui em ambas as modalidade de avaliação, uma vez que esta foi pensada com esta dupla intencionalidade: sumativa, já que foi o primeiro momento de avaliação deste tipo, nesta Unidade Didática, com que os alunos contactaram; e formativa, uma vez que para além da classificação atribuída à mesma, foram tecidos comentários a cada um dos alunos, principalmente, onde se verificaram erros nas resoluções. Mais: quando este instrumento avaliativo foi concebido, a sua ideia-base era precisamente permitir-me perceber em como é que a Unidade Didática tinha sido aprendida por eles, e que tipo de apoio é que era necessário fornecer antes do teste escrito de avaliação sumativa.

Olhando para a estrutura da questão de aula (Anexo 21), verifica-se que esta contempla cinco tarefas. Como o principal foco, no que toca à matéria sobre a qual incidia, era somente a Trigonometria, tentou-se colocar uma razão trigonométrica por pergunta, de forma a compreender se todas tinham sido devidamente assimiladas, e se os alunos eram capazes de utilizar a simbologia e a notação adequadas a cada uma. A questão de aula foi contruída em crescendo de dificuldade, ou seja, a dificuldade das perguntas ia crescendo conforme a ordem das mesmas.

A primeira tarefa era um (1); (a), que pretendia simplesmente a aplicação direta da definição da razão trigonométrica em causa. Tal como sucedia com a segunda tarefa, (1); (a), onde, mais uma vez, era solicitada a definição da razão trigonométrica, e posterior cálculo do ângulo pedido, o que impeliria os alunos à utilização do $arcsen$.

Em relação às duas perguntas anteriores, a terceira acrescia no nível de dificuldade porque a figura em questão não era um triângulo, tendo os alunos que perceber onde estava o triângulo retângulo que lhes permitiria dar a resposta à pergunta inicialmente formulada. Apesar dos dois passos necessários para solucionar a questão, o nível de desafio da mesma é reduzido, e, portanto, esta tarefa é um (1); (a).

A quarta pergunta obrigaria à mobilização das relações entre as razões trigonométricas, constituindo-se esta como uma tarefa de aplicação das mesmas, no entanto, os alunos teriam de recorrer a argumentos trigonométricos para justificar a escolha da solução positiva em detrimento da negativa. Logo esta tarefa é (1); (a), (b).

A última pergunta era a que apresentava um nível cognitivo mais elevado, caracterizando-a como um (5); (c). Os alunos teriam de fazer vários passos para a resolução do problema, mostrando as devidas justificações para fundamentar aquilo que apresentavam. Teriam ainda de perceber, que dado que este é um problema com um contexto não matemático, deveriam apresentar a resposta adequada ao mesmo.

De todos os instrumentos, resta apenas analisar o teste escrito de avaliação sumativa (Anexo 22). Como é habitual nos testes escritos de avaliação sumativa, desde o começo do ano letivo que as professoras das turmas do 9.º ano de escolaridade optam por colocar algumas perguntas retiradas das provas de avaliação sumativa externa, assim, este teste seguiu os mesmos moldes dos anteriores.

É necessário, ainda, referir que o teste não incidia somente sobre o tema da Trigonometria, dado o ano de escolaridade em questão, tendo sido escolhidos os temas da probabilidade e das inequações como os outros tópicos em avaliação.

Este teste contemplava 16 perguntas, sendo cinco de escolha múltipla (a pergunta 1, 4, 9, 13 e 14); e as restantes de resposta aberta. Das 16 perguntas, cinco referiam-se ao tema das inequações, duas ao das probabilidades e as restantes ao da Trigonometria. Esta proporção, tanto no formato das perguntas, como na sua ponderação, quer em termos de tópico matemático, quer em termos de cotação, tiveram sempre em conta as orientações das professoras responsáveis pelas turmas de 9.º ano.

Debrucemo-nos somente sobre as perguntas referentes à Trigonometria (tópico matemático sobre o qual versa este estudo).

Duas das perguntas de escolha múltipla eram sobre Trigonometria: a pergunta 1 e a pergunta 13. A pergunta um pretendia compreender se os alunos tinham entendido o intervalo de variação no qual as razões trigonométricas variam, enquanto que a pergunta 13 pretendia apelar à utilização da relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares. São estas tarefas (1); (a).

As perguntas 3 e 8 eram perguntas de aplicação direta das definições das razões trigonométricas (à semelhança das perguntas dois e três da questão de aula). Conseguimos tipificá-las como (4); (a) e (1); (a), respetivamente.

As perguntas 6 e 16 objetivavam a utilização das relações entre as razões trigonométricas, primeiramente (pergunta seis) para o cálculo dos valores exatos de outras razões trigonométricas, conhecendo o valor de uma delas; e posteriormente (pergunta 16), para a realização de demonstrações. Estas tarefas são (b).

As perguntas 7 e 15 eram (5), onde os alunos teriam de percorrer várias etapas, fazendo a interpretação dos dados fornecidos inicialmente, de forma a serem capazes de responder adequadamente à questão. A pergunta 15 destacava-se, dado que teria de ser equacionado um sistema com duas equações a duas incógnitas, sendo necessário um bom domínio algébrico para o solucionar. Logo, a acrescentar à classificação já feita, estas tarefas são (c).

Finalmente, a pergunta 10 era um (4), que incitaria os alunos a aplicar recíproco do Teorema de Pitágoras e as definições das razões trigonométricas, com a dificuldade da figura que apoia o enunciado ser composta por dois triângulos, tendo os alunos que saber destrinçar os elementos de cada uma das figuras envolvidas, para o sucesso na resposta à pergunta. Esta tarefa era ainda dos tipos (b); (c).

3.7. Reflexões sobre as aulas lecionadas

Antes de se apresentarem as reflexões das aulas lecionadas, importa referir que estas foram realizadas tendo por base as notas de campo por mim registas imediatamente após o término de cada aula, a visualização dos vídeos com a gravação de cada aula e, principalmente, considerando os comentários que me eram dirigidos, pelas minhas orientadoras, no final de cada aula.

Aula de 14 de fevereiro de 2019

Esta foi uma aula (Plano de aula: Anexo 23) onde nervosismo estava muito presente, não só por ser a primeira aula da minha intervenção, mas também pelo facto de ter de assumir toda a Unidade Didática em questão, e, portanto, toda a responsabilidade daí advinda. E este novo fator contribui para se sentir efetivamente o peso da responsabilidade que é lecionar.

Esta aula foi um bloco de 90 minutos (2 x 45 minutos), que tinha por objetivo a introdução das razões trigonométricas. Para isso foi feita uma revisão do Teorema de Tales e Semelhança de triângulos, nos primeiros 45minutos e nos seguintes 45 minutos foram introduzidas as razões trigonométricas.

Considero que a aula correu bem dado que os seus objetivos foram atingidos na generalidade, no entanto, há pontos que não foram bem conseguidos.

O que tinha sido idealizado para esta aula era a realização de duas fichas de trabalho e uma atividade do livro. Das tarefas propostas aos alunos foram realizadas a atividade e uma ficha de trabalho, sendo que a outra ficou metade por resolver. Assim, no que se refere ao plano de aula este não foi cumprido, devendo-se este incumprimento à extensão do mesmo. Este aspeto tinha sido pensado, no entanto, é difícil de prever que ritmo de trabalho é que os alunos irão imprimir à aula e como irão reagir às tarefas propostas.

Em relação à dinâmica dos pares, este é um aspeto que muito me preocupou antes da aula e que me continua a ocupar a mente. Os pares escolhidos para esta aula exigiram muita reflexão da minha parte, incluindo conversas não só com a minha colega de estágio e a professora cooperante, mas também com a respetiva diretora de turma. Estes alunos estão muito habituados a trabalhar individualmente, e isso é bem visível, por exemplo, na planta de sala de aula, onde as mesas estão dispostas unitariamente preservando alguma distância entre si. Sugerir aos alunos que trabalhem a pares é um desafio, não só para eles, mas também para mim. Para eles porque, apesar da grande maioria manifestar imenso agrado nesse trabalho, há um reduzido grupo de alunos que parece não gostar, dado o aproveitamento que evidenciaram. Para mim, porque tenho de conseguir gerir as dinâmicas de forma a que todos consigam aproveitar de forma útil o tempo da aula. Esta constituição dos pares já tinha sido experimentada por mim, no período passado nas minhas aulas avaliadas. Pelo entusiamo demonstrado e pelo trabalho que realizaram considerei que esta continuaria a ser uma boa aposta. De momento, este modo de trabalho parece-me ser proveitoso para a grande maioria dos alunos já que o seu empenho e aproveitamento reflete isso mesmo.

Relativamente às imprecisões, estas ocorreram quando uma das alunas foi ao quadro e utilizou um dos critério de semelhança triângulos de forma incorreta, eu olhei para lá, mencionei aos alunos o cuidado a ter com a utilização do critério LAL (que o ângulo têm de ser o que é partilhado pelos lados que se estão a considerar) e não corrigi, só depois, é que fui chamada à atenção para essa incorreção que foi imediatamente realizada. Posteriormente, num dos exercícios propostos aos alunos, em que era pedido que calculassem a altura de um edifício, não justifiquei que os triângulos eram semelhantes, e que é por essa razão que era possível escreverem os quocientes que permitiam encontrar o valor pretendido, tendo sido feita a correção na aula seguinte. Creio que este tipo de imprecisões se prendem com o facto de dividir a atenção entre o que os alunos estão a expor no quadro e o trabalho que é por eles feito no lugar. Tenho de aprender a fazer melhor essa gestão e garantir que tudo o que está no quadro está correto e claro para todos os alunos, uma vez que o quadro assume um importante papel na sala de aula já que é dele que os alunos vão fazer os seus registos para o caderno diário, caderno esse que é objeto de estudo para os momentos de avaliação.

De forma geral, creio que a aula correu bem dado que os objetivos da mesma foram atingidos. Isso é possível verificar, através, por exemplo, das resoluções que os alunos me entregaram relativas a uma das fichas propostas, que se referiam à semelhança de triângulos.

Em suma, deverei auxiliar os alunos no seu trabalho autónomo sem descurar aquilo que está a ser feito no quadro, porque isso traz implicações para o trabalho produzido por eles. Deverei, igualmente, refletir acerca dos pares que poderão ser formados a fim de que todos os alunos possam aproveitar da melhor forma possível a aula.

Aula de 21 de fevereiro de 2019

A segunda aula da intervenção (Plano de aula: Anexo 24), com a duração de 90 minutos (2 x 45 minutos) foi uma aula com tecnologia. É importante começar por referir que estes alunos, para além de não estarem habituados a trabalhar colaborativamente, também não estão acostumados ao trabalho com recurso à tecnologia na aula de Matemática, colocando-os como atores principais, ou seja, uma aula em que são eles os artífices do trabalho que está a ser desenvolvido, impelindo-os a "por a mão na massa". Utilizou-se o software Geogebra para que os alunos possam concluir, por eles próprios, que as razões trigonométricas são invariantes, ou seja, que as razões trigonométricas dependem unicamente do valor da amplitude do ângulo em causa.

Para esta aula, alguns pares, cujas dinâmicas não tinham funcionado na aula anterior, foram reformulados. Tive ainda de ter em consideração que havia alunos que estavam a faltar, e, portanto, os pares previamente pensados tiveram de sofrer alterações. Este improviso que tive de fazer resultou na formação de pares cujo comportamento foi negativo, refletindo-se no seu aproveitamento. Este foi um dos aspetos menos bem conseguidos da aula: o comportamento e o aproveitamento dos alunos enquanto pares não foi positivo, o que me levou a refletir bastante sobre este assunto. Será que devo continuar a investir neste modo de trabalho? Será que esta forma de trabalhar está, maioritariamente, a beneficiar grande parte da turma? Deverei parar com o trabalho colaborativo e voltar ao que os alunos estão habituados (trabalho individual)? Equacionar esta possibilidade foi motivada pelo grande desânimo que senti quando saí da aula. Assim que refleti um pouco mais sobre esta temática, estabeleci que iria experimentar este método durante mais uma semana. Se, efetivamente, se verificasse que este modo de trabalho é produtivo para a grande maioria da turma, continuaria; caso contrário, teria de repensar a forma de organizar os alunos na aula de Matemática.

Para acrescentar a esta pequena reflexão, é ainda de salientar dois aspetos, que da minha perspetiva, muito contribuíram para a agitação da turma. O primeiro tem que ver com o facto de ser a primeira vez que eles contactaram com a tecnologia de tão perto, na sala de aula, uma vez que foram providenciados tablets para que todos os pares pudessem explorar à vontade e conjeturar aquilo que entendessem a partir da proposta que lhes foi apresentada. O segundo aspeto relaciona-se com o comportamento que os alunos vêm a demonstrar nestes últimos dias e que foi atestado em reunião de conselho de turma, onde os professores referiram que a grande parte dos alunos evidencia um grande cansaço que se reflete, em alguns casos em apatia perante as aulas, noutros casos numa grande agitação.

O desânimo que senti foi partilhado com a minha colega de estágio e com a professora cooperante, que me chamaram à atenção de que a agitação foi crescendo ao longo da aula pelo facto de ter existido um momento da mesma em que dei demasiado tempo para que os alunos desenvolvem determinada atividade, o que fez com que aqueles que já a tinham concluído começassem a conversar sobre outros assuntos. Este é um aspeto que deverei ter em consideração e para o qual deverei estar mais atenta. Nesta situação teria duas opções a considerar: ou reduzia o tempo que dei aos alunos para a realização da tarefa ou então distribuía mais trabalho para quem já tivesse terminado.

Do ponto de vista formativo, esta aula apresentou-se como sendo muito rica na medida em que os erros por mim cometidos acabaram por mostrar as suas consequências imediatas. O facto de não ter atribuído mais tarefas para que os alunos pudessem aproveitar da melhor forma possível a aula, acabou por afetar, negativamente, o resto da aula, culminando, como já disse, numa agitação tremenda, que acabou por ser um "comboio" que nunca mais consegui "apanhar", já que depois foi muito difícil conseguir que os alunos se voltassem a concentrar no essencial. A "verdadeira fatura" chegou quando não consegui cumprir o plano de aula, não conseguindo, assim, terminar de corrigir e discutir a ficha de trabalho proposta, o que efetivamente era importante porque a requisição dos tablets era para aquela aula, e, portanto, a sua utilização deveria ter sido maximizada.

Não obstante tudo isto, a introdução da tecnologia em sala de aula numa ótica do utilizador (e não apenas do observador) foi fundamental e creio que, mais à frente, mostrará os seus frutos.

É necessário entender, por fim, que todas as questões aqui levantadas prendem-se com vários fatores, sendo, talvez o mais determinante, a minha falta de experiência como professora, logo, a tecnologia será utilizada em sala de aula sempre que se justifique, servindo o presente texto como uma oportunidade para pensar a minha prática e melhorá-la. Assim, esta reflexão é um “desabafo” e não uma justificação e/ou reclamação, tendo, então, por objetivo a minha melhoria enquanto futura profissional da educação.

Aula de 25 de fevereiro de 2019

Esta terceira aula (Plano de aula: Anexo 25), de apenas 45 minutos, foi curta para tudo aquilo que queria fazer, de onde se pode subentender, então, que o plano de aula não foi cumprido. Esta aula teve por objetivo concluir a ficha de trabalho iniciada na aula anterior, sistematizando os resultados observados através de registos no caderno diário dos alunos e por meio de generalizações – demonstrações – das propriedades relacionadas às razões trigonométricas. Pode-se, portanto, referir que esta aula tinha como foco que os alunos desenvolvessem a sua capacidade de abstração e demonstração, ou seja, o raciocínio dedutivo, no âmbito da Trigonometria.

Um dos pontos positivos desta aula é precisamente este: o incentivo para que os alunos consigam compreender que aquilo que testaram, no particular, com a ficha de trabalho, é passível de generalização e justificação matemática.

No entanto, apesar de uma forma muito intuitiva, realizarem as generalizações, fazer a sua prova/justificação nem sempre é fácil, e por essa razão, optei por fazer, em conjunto com eles, a primeira de três demonstrações, para que entendessem que passos deviam ser dados e qual o tipo de raciocínio envolvido.

Comecei por perguntar se aquilo que estávamos a tentar demonstrar era efetivamente óbvio para eles, porque esse é um ponto essencial para que consigam realizar a demonstração, ou seja, a garantia de que todos os alunos estavam convencidos da veracidade da propriedade é fundamental para que todos consigam proceder à sua prova, porque se alguém considerasse que o resultado não fazia sentido, não conseguiria mobilizar o argumentos necessários para o justificar. Depois, referi-lhes que como estamos numa demonstração do tipo *se/então*, a única proposição que sabemos ser verdadeira é a que segue imediatamente o *se*, e é nessa que devemos “pegar”. De seguida, escrevi o final da demonstração – onde queremos chegar – que é a proposição que vem logo a seguir ao *então*, clarificando que devíamos conseguir arranjar argumentos que nos permitissem “preencher o espaço vazio” entre ambas estas partes. Fomos completando a demonstração de baixo para cima e vice-versa, conforme os argumentos que iam sendo apresentados e sugeridos pelos alunos. Na aula fiquei com a sensação de que os alunos estavam a compreender o que foi feito, contudo, como lhes pedi que me entregassem uma demonstração análoga a esta numa folha à parte para poder dar *feedback*, percebi que talvez o facto de andar a completar a começar do fim e depois a passar para o início não teve o efeito desejado, acabando, provavelmente, por confundir os alunos, já que a grande maioria deles acaba por trocar duas passagens da demonstração. A certa altura, depois de ver tantos alunos repetirem o mesmo erro, fui rever a aula para verificar se efetivamente tinha cometido esse lapso, o que não se sucedeu, daí ter inferido que, na tentativa de simplificar, mostrando a forma natural como pode ser "construída" uma demonstração deste tipo (completando conforme os argumentos que iam surgindo), esta metodologia não se mostrou benéfica para a aprendizagem dos alunos.

Um outro aspeto menos bem conseguido foi o facto de não ter feito a representação correta dos pares de triângulos no quadro, nomeando os vértices de ambos os triângulos. Este também pode ter sido um aspeto que influiu na confusão gerada nos alunos.

Há ainda um outro ponto que não correu tão bem. Ao terminar a aula, um dos alunos foi ao quadro fazer a segunda demonstração, e como já estávamos em cima da hora, acabei por me desconcentrar e nem sequer reparei que aquilo que ele tinha escrito não estava correto, dando por terminada a aula. Esta falta de concentração é um aspeto a ter em conta, já que bastava ter prestado atenção ao que estava a ser feito, e escusava de na aula seguinte estar a fazer erratas, e, portanto, a consumir muito mais tempo do que o necessário. Este foi um importante momento para refletir sobre a minha prática, precisamente pelo facto de o tempo ser curto, e ter de ser aproveitado ao máximo.

Resumindo, deverei estar mais concentrada desde o início até ao final da aula de forma a que todos os minutos sejam realmente proveitosos. Deverei também ter mais atenção à forma como apresento os exercícios e faço as representações no quadro. Finalmente, deverei pensar noutras formas de expor demonstrações, já que este é um tipo de tarefa a que os alunos não estão habituados.

Aula de 28 de fevereiro de 2019

Antes de refletir sobre a aula, é importante notar que esta aula fechou uma semana onde os alunos foram muito solicitados devido ao aniversário do Colégio que se realizou no fim de semana imediatamente seguinte. Assim (e tal como já tinha referido em relação a uma aula anterior da minha intervenção), o cansaço dos alunos foi evidente, apesar de que, mesmo tendo isto em conta, o seu aproveitamento e comportamento foram bastante razoáveis.

A quarta aula (Plano de aula: Anexo 27) da minha intervenção teve a duração de 90 minutos (2 x 45 minutos) e tinha por objetivo que os alunos se familiarizassem com a utilização da tabela trigonométrica de qualquer ângulo agudo inteiro e com a calculadora científica. Com este domínio sobre estes dois instrumentos de trabalho essenciais para a Trigonometria – tabela e calculadora – os alunos estariam aptos a resolver triângulos retângulos, em contextos matemáticos e em contextos de realidade (semi-realidade). Como facilmente se pode atestar pretendia-se trabalhar vários aspetos da Trigonometria com os alunos, tendo-se planificado uma aula muito densa a nível de conteúdos, tendo sido impossível lecioná-los todos, logo o plano de aula não foi cumprido, ficando a faltar abordar a resolução de triângulos retângulos aplicados à realidade, que o manual dos alunos denomina como determinar distâncias a locais inacessíveis.

Um dos aspetos menos bem conseguidos da aula foi o facto de deixar que os alunos trabalhassem sem um grande norte, no sentido em que, lhes comunicava qual a tarefa que deveriam realizar, sem lhes ter apresentado nenhum exemplo antes, e como era a primeira vez que estavam a contactar com este tipo de problemas e com esta dupla ferramenta que têm ao dispor – calculadora e tabela – deveria ter resolvido pelo menos uma tarefa de cada tipo (determinar o valor do ângulo, conhecendo o valor da razão trigonométrica e vice-versa) para que os alunos conseguissem orientar-se e compreenderem como deveriam ser feitos.

Outro ponto que deverei ter em atenção é que, sempre que necessário, deverei sintetizar aquilo que foi feito para que os alunos consigam organizar as ideias, ou seja, quando os alunos terminam uma determinada tarefa, às tantas, com as eventuais perguntas que possam ter surgido, podem ter ficado perdidos, sendo que para que os alunos sejam capazes de compreender todo o raciocínio envolvido é importante que a professora percorra novamente esse caminho, isto é, olhando especificamente para esta aula, no final da realização das tarefas propostas aos alunos, deveria ter mencionado a forma de calcular o valor da razão trigonométrica, conhecendo o valor do ângulo correspondente, e qual a tecla da calculadora que me permite fazer esse cálculo; e a operação recíproca desta, referindo, novamente a tecla da calculadora que possibilita essa conta.

Outro aspeto a ter em conta para aperfeiçoar é a organização do quadro. Quando escrevo no quadro é importante que este tenha uma ordem e que essa ordem seja respeitada até ao final da aula. Para além disso, como foi utilizada uma apresentação em *PowerPoint*, o quadro serviu como um auxiliar para explicar alguns dos tópicos mencionados, dando aso, a que só apagasse partes do quadro para poder fazer essas explicações. Ora, é importante que ter em conta a organização do quadro para que até todos consigam acompanhar o que está a ser realizado.

Relativamente aos aspetos mais bem conseguidos, destaco dois. O primeiro refere-se ao modo de trabalho dos alunos, efetivamente o trabalho a pares mostra-se muito relevante, o que é evidenciado nas resoluções escritas de exercícios que os alunos entregam. A totalidade dos alunos, neste ponto da intervenção, já consegue identificar qual a razão trigonométrica que melhor se adequa ao que é pedido, e a grande maioria deles apresenta os valores aproximados das mesmas (ou do ângulo) da forma correta, o que demonstra que a calculadora científica ou a tabela trigonométrica está a ser devidamente utilizada. As dificuldades com os valores aproximados vêm do facto dos alunos não conseguirem, ainda, compreender quantas casas decimais devem ser preservadas nos cálculos intermédios de forma a que o resultado final esteja certo. Creio que estas dificuldades serão ultrapassadas quando os alunos ganharem mais destreza e prática com este tipo de tarefas.

De um modo geral, a aula correu bem, e, pelo que mencionei, os objetivos da mesma foram atingidos. No entanto, deverei ter em conta os aspetos que foram menos bem conseguidos, a fim de melhorá-los.

Aula de 11 de março de 2019

Esta foi uma aula (Plano de aula: Anexo 28) de 45 minutos, que tinha por objetivo que os alunos pudessem praticar e aplicar os seus conhecimentos relativos à Trigonometria. Esta foi a primeira grande oportunidade que tiveram de o fazer. Já tinham sido realizados exercícios pontuais, em conjunto com a turma toda, no entanto, permitir que os alunos pudessem trabalhar de forma autónoma, e que se familiarizem com os problemas referentes às razões trigonométricas, ainda não tinha acontecido.

O plano de aula não foi cumprido, faltando concretizar a correção e discussão do último problema. A razão principal para este incumprimento deve-se, talvez, à extensão excessiva da planificação. Aliado a este facto, tem-se ainda aquilo que foi apontado no primeiro parágrafo desta reflexão: este foi o primeiro grande momento que os alunos tiveram para realizarem trabalho autónomo no âmbito da resolução de problemas na unidade da Trigonometria. Este último aspeto tem ainda um outro que lhe está subjacente: a resolução de problemas. Esta faceta da Matemática exige que os alunos consigam fazer uma boa interpretação do enunciado do problema, percebendo o quais são dados relevantes para a sua resolução e o que é pedido; para além de que é condição necessária um bom domínio do tópico matemático em consideração, para que se consiga responder ao que é pedido.

Interpretar o problema, compreender o que é pedido, entender como se pode aplicar a Trigonometria, reconhecer que se trata de problemas com contextos de realidade, e o número de casas decimais a serem preservadas em cálculos intermédios, foram algumas das dificuldades manifestadas, por parte dos alunos. A principal dificuldade evidenciada foi perceber como e porquê se estava a aplicar a Trigonometria. À medida que os problemas iam sendo resolvidos, as dificuldades iam-se amenizando e creio que os alunos, na sua generalidade, no final da aula, conseguiram superar a principal dificuldade apontada, entendendo a utilidade da Trigonometria na determinação de distâncias inacessíveis. Esta compreensão é atestada pela resolução que os alunos apresentavam, de forma autónoma, com o decorrer da aula, indicando, devidamente, a resposta ao problema em questão. A questão dos arredondamentos nos cálculos intermédios levantou muitas dúvidas e durante toda a Unidade foi um obstáculo na resolução das tarefas propostas.

Nesta aula optei por não colocar os alunos em pares dado que a aula era de apenas um tempo (45 minutos), e sendo esta uma turma que demora a organizar-se e a concentrar-se para começar a trabalhar, iria perder tempo que depois seria precioso. Pelo aproveitamento da generalidade dos alunos, posso concluir que esta opção resultou. No entanto, houve casos em que isso não se verificou, demonstrando a relevância que o trabalho colaborativo representa para esses alunos.

A participação dos alunos foi ordeira e prestei mais atenção aquilo que estava a ser escrito no quadro, tendo o cuidado de ir retificando o que fosse necessário e ir fazendo chamadas de atenção a determinados pontos que considerei importantes e/ou que levantaram mais problemas.

Assim, considero que a aula atingiu os objetivos estabelecidos e que me forneceu importante *feedback*, não só em relação às dificuldades sentidas pelos alunos (permitindo-me autoavaliar no que concerne às aulas até então lecionadas), mas também em relação ao modo de trabalho a adotar.

Aula de 12 de março de 2019

Para esta aula (Plano de aula: Anexo 29), de dois tempos (90 minutos), o objetivo era introduzir as relações entre as razões trigonométricas do mesmo ângulo, nomeadamente, a Fórmula Fundamental da Trigonometria.

Dado que na aula anterior, o plano não foi cumprido, tive de terminar aquilo que não tinha sido abordado, portanto, a aula foi iniciada com o último dos seis problemas propostos. Foi apresentada por uma aluna no quadro a resolução do mesmo, tendo esta explicado o que fez para os restantes colegas e, no final, para esclarecer eventuais dúvidas, fiz uma síntese de como fazer a abordagem a problemas deste tipo. O facto de ter de concluir a aula anterior, com esta tarefa, resultou no não cumprimento da planificação da presente aula, tendo ficado a faltar a exploração das relações entre as razões trigonométricas do mesmo ângulo para o cálculo de valores aproximados e como ferramenta para fazer demonstrações.

Após a discussão e sistematização deste segmento de aula, foi distribuída uma ficha de trabalho (Anexo 11).

Um dos pontos que suscitou mais dúvidas foi a demonstração que permite concluir que um determinado triângulo é retângulo, não pelos cálculos envolvidos na mesma, mas sim pela argumentação que valida esses mesmos cálculos. De facto, a maioria dos alunos evoca o Teorema de Pitágoras para sustentar esta prova, ao invés do seu recíproco, e mesmo depois de se clarificar que é a utilização do recíproco a correta, entender que uma implicação não é o mesmo que uma equivalência, foi algo de grande complexidade para os alunos. Sem nunca ter formalizado a este nível esta diferença entre o teorema e o seu recíproco, creio que a explicação foi bem conseguida.

Um dos aspetos a melhorar é organização no quadro, que, desta vez, foi potenciada pela abundância de materiais em sala de aula. Quero com isto dizer que para além dos habituais recursos utilizados, foi ainda preparada uma apresentação em PowerPoint, que à medida que ia sendo exibida, era complementada com explicações no quadro, no entanto, para escrever aquilo que pretendia clarificar, apagava o quadro parcialmente, o que contribuiu para esta desorganização. Deverei, assim, continuar a ter mais atenção àquilo que é exposto no quadro dada a sua relevância para a aprendizagem dos alunos.

No momento final da aula foram, ainda, apresentadas resoluções que envolviam os conceitos centrais da aula e que a generalidade dos alunos conseguiu efetuar (como pude atestar conforme ia circulando pela sala), o que me leva a inferir que eles conseguiram compreender aquilo que foi lecionado.

Concluo, assim, que de uma forma geral, a aula foi bem conseguida.

Aula de 14 de março de 2019

Esta aula (Plano de aula: Anexo 30) teve a duração 90 minutos, tendo por objetivo a conclusão da lecionação dos conteúdos da Unidade Didática. Foram, assim, abordadas as relações entre as razões trigonométricas do mesmo ângulo como meio para fazer demonstrações no âmbito da Trigonometria e para fazer cálculos das mesmas com valores aproximados. Foi, ainda, explorada a relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares e tabela de valores dos ângulos de referência. Os dois primeiros tópicos estavam incluídos no plano da aula anterior – que não foi possível concluir.

A aula iniciou-se com resolução de um exercício do manual cujo objetivo era por os alunos a fazer demonstrações utilizando as relações entre as razões trigonométricas do mesmo ângulo. Este exercício contemplava duas alíneas, sendo que a primeira, e tal como estava planificado, seria realizada em grande grupo, com a turma toda, e a outra seria objeto de trabalho autónomo para os alunos poderem experimentar este tipo de tarefa matemática. À medida que ia circulando pela sala, pude verificar que muitos alunos estavam com dificuldades em iniciar e/ou em conseguir manipular a expressão inicial para poderem chegar ao que era pretendido. Apesar disto, houve um par de alunos que conseguiu realizar a demonstração sem grandes dificuldades, e que conseguiu ainda fazer um outro exercício do manual completamente análogo. Como este é um tipo de tarefa que não é muito usual na sala de aula, e uma vez que este é um bom tópico matemático para que haja este contacto por parte dos alunos, optei por lhes dar muito tempo para que pudessem pensar um pouco mais nesta segunda alínea. Percebi que alguns deles não compreenderam o objetivo de realizarem este tipo de tarefa, no entanto, creio que é importante dar-lhes espaço para que eles possam refletir um pouco sobre isto e, até, chegarem a este tipo de conclusões. Esta parte inicial da aula, para a qual estavam previstos apenas 15 minutos demorou-me 30 minutos, o que me obrigou a fazer opções relativamente ao que estava planificado, como irei explicitar mais à frente. Apesar de tudo isto, considero que este foi um momento a destacar da aula, precisamente por se ter dado espaço para que os alunos se possam inteirar de todas as tarefas matemáticas, inclusive aquelas que parecem não ter qualquer tipo de utilidade. Deveriam, ainda assim, ter avançado mais cedo para a explicação da segunda alínea no quadro dado que foi geradora de tantas dúvidas na generalidade dos alunos.

Depois deste momento, conclui o que faltava da aula anterior, mostrando aos alunos como podem fazer o cálculo com valores aproximados das razões trigonométricas, conhecendo uma delas. Como aqui é necessário calcular primeiramente o ângulo sabendo o valor da razão trigonométrica, consegui perceber, através das resoluções que os alunos iam fazendo (e um deles apresentou-a no quadro) de um exercício que lhes propus, que muitos estavam com dúvidas, não em fazer o cálculo (utilizando a calculadora científica), mas sim na forma de escrevê-lo, o que me levou a pensar que tê-lo mostrado apenas nos *slides* de *PowerPoint* não foi suficiente, e que deveria ter insistido mais neste tipo de exercícios para que os alunos conseguissem compreender como é feita a passagem para isolar o ângulo. A insistência, e bem, de um aluno, na tentativa de clarificar esta passagem foi um importante momento para inferir que é de efetiva importância, principalmente aquando a introdução de nova simbologia matemática, explicitá-la de forma inequívoca e frequente, porque, para nós, professores, que já estamos tão habituados à linguagem matemática, achamos que os alunos irão, de igual forma, apropriar-se da mesma, mas isso nem sempre é verdade, tal como este momento atesta, porque é preciso tempo para que essa integração se faça.

Como já referi acima, o facto de ter demorado muito mais tempo do que o que estava planeado, obrigou-me a ter de tomar diversas opções. Faltavam menos de 30 minutos para a aula terminar, quando consegui introduzir a relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares, desta forma, tive que acelerar o ritmo dos alunos para que registassem o mais rapidamente possível aquilo que precisava de ser escrito no caderno diário. Quando terminei esta abordagem aos ângulos complementares faltavam 15 minutos para tocar, e, portanto, tinha apenas 15 minutos para explicar a tabela com os valores dos ângulos de referência. Neste momento, ao invés de deixar os alunos realizarem os exercícios do manual que levariam à dedução destes valores, optei por fazer apenas um em conjunto com a turma, explicando que os outros valores seriam obtidos de forma completamente análoga. Daqui, parti para a construção da tabela e só sobrou tempo para que os alunos pudessem passá-la para o caderno diário. Creio que esta opção não prejudicou em nada a aprendizagem dos alunos no que concerne a este subtópico.

Tendo tudo isto em consideração, entende-se que o plano de aula não foi cumprido, tendo ficado em falta a resolução de exercícios para a consolidação da relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares e da tabela dos valores dos ângulos de referência.

Aula de 15 de março de 2019

Esta aula (Plano de aula: Anexo 30) surge em substituição de uma aula de 45 minutos, que inicialmente estava prevista acontecer no dia 18 de março de 2019. Dada a imprevisibilidade da mesma, foi preparada uma ficha de trabalho (Anexo 18) onde se reuniram as tarefas típicas da Trigonometria.

Não foi possível realizar as quatro tarefas apresentadas, logo, o plano de aula não foi cumprido, tendo sido resolvidas no quadro e discutidas em grande grupo a primeira e a última. A primeira porque permitia que os alunos pudessem aplicar os seus conhecimentos relativamente à Trigonometria, sendo esta uma tarefa bastante completa possibilitando-me chamar à atenção de muitos e diversos aspetos que os alunos deveriam atentar na resolução deste tipo de tarefas. A última porque foi retirada de uma prova final de 3.º ciclo e tinha por objetivo que os alunos se familiarizassem com os enunciados que surgem neste tipo de avaliação. Permitiu-me reforçar aquilo que já tinha sido visto na aula de resolução de problemas envolvendo a Trigonometria, e alertar para que os alunos consigam selecionar aquilo que é importante retirar do enunciado dada a sua extensão.

Considero que, apesar de não ter sido possível realizar todas as tarefas, a grande maioria dos alunos conseguiu fazer três tarefas, tendo havido casos em que conseguiram concluir a ficha.

Destaco como um aspeto positivo da aula os momentos de discussão em conjunto-turma. Estes foram importantes momentos de aprendizagem para os alunos, como pude verificar conforme ia circulando pela sala e pelo que pude observar, posteriormente, da resolução das fichas, dado que pedi que as entregassem para dar-lhes *feedback*. Noto, ainda, uma grande dificuldade com os valores aproximados e com o número de casas decimais a serem preservadas em cálculos intermédios.

Um aspeto a melhorar prende-se com a participação dos alunos. Sempre que me era possível no decorrer da minha intervenção, fui tentando disciplinar os alunos no sentido em que quando quisessem responder levantassem o braço, para não dar azo a confusões, no entanto, há momentos em que estou no quadro e que faço uma pergunta para a turma e os alunos, efetivamente, levantando o braço e eu acabo por responder à minha pergunta, não lhes dando essa oportunidade. Deverei estar mais atenta para que esta metodologia seja um estímulo à participação e organização da sala de aula e não o contrário.

Aula de 19 de março de 2019

Esta aula (Plano de aula: Anexo 32) teve a duração de 90 minutos (2 blocos de 45 minutos), tendo sido reservados 35 minutos para a realização de uma questão-aula. Assim, os objetivos estabelecidos para a mesma foram: esclarecimento de dúvidas acerca de tarefas realizadas; clarificação de ideias que, pela recolha e posterior *feedback*, de diversas fichas a professora pode observar que ainda não estavam consolidadas; e, aferição de conhecimentos por meio de uma questão-aula sobre o tópico da Trigonometria.

Comecei a aula por chamar à atenção de diversos aspetos que pude observar da recolha de fichas que fiz. Na minha opinião, este foi um momento bem conseguido dado que, para além de explicar os dois raciocínios falaciosos apresentados por alunos, pude ainda apresentar o correto – através do questionamento de um dos alunos, dando oportunidade para rever uma série de pontos importantes em relação aos tópicos da Trigonometria, como são exemplo, a utilização da Fórmula Fundamental da Trigonometria como suporte para a determinação de valores exatos de razões trigonométricas; a determinação de ângulos através do conhecimento do valor das razões trigonométricas; a diferença de processos entre valores exatos e valores aproximados e quando devem ser utilizados uns e outros. Para além disso, como fiz essa exposição no quadro, à medida que ia apresentado os raciocínios errados ia riscando, o que creio que ajudou a clarificar aquilo que pretendia.

Antes da realização da questão aula, estava planificada a realização das cinco primeiras tarefas de uma ficha de trabalho que visava somente a prática de exercícios e problemas de modo a que os alunos pudessem preparar-se para os momentos de avaliação. Foi discutida e resolvida a primeira tarefa que envolvia a Fórmula

Fundamental da Trigonometria e a relação entre as três razões trigonométricas, o que foi positivo, uma vez que foi uma oportunidade de os alunos assentarem ideias relativamente às relações entre as razões trigonométricas, assunto esse que tinha sido objeto de explicação no momento anterior à realização desta ficha. Foi ainda exposta e discutida a segunda tarefa da ficha, que era um problema, permitindo-me alertar os alunos sobre diversos aspetos que eles têm de ter em conta, nomeadamente, que abordagem fazer quando se apresentam tarefas deste tipo e a apresentação da resposta do problema já que se trata de um problema com um contexto de realidade. Então, o plano de aula não foi cumprido, tendo ficado em falta a apresentação no quadro e discussão em grupo turma das três seguintes tarefas.

Sumariamente, creio que foram cumpridos os objetivos propostos, tendo-me sido dada a oportunidade de poder destacar um conjunto de pontos-chave no domínio da Trigonometria.

Aula de 21 de março de 2019

Esta foi a penúltima aula (Plano de aula: Anexo 33) da intervenção, com uma duração de 90 minutos (dois blocos de 45 minutos) e tinha por objetivo a consolidação dos conteúdos lecionados através da correção da questão-aula realizada na aula anterior; do esclarecimento de eventuais dúvidas e da realização de tarefas, mais especificamente, exercícios e problemas no âmbito da Trigonometria. Assim, e como também já constava na planificação do Colégio, os últimos 45 minutos desta aula seriam para esclarecimento de dúvidas, dado que esta seria a última aula antes da realização do teste sumativo.

O primeiro momento desta aula referiu-se à correção da questão-aula, que foi entregue aos alunos. Neste momento, a professora, à medida que ia apresentando a correção ia chamando à atenção dos erros cometidos e ia pedindo a colaboração dos alunos que sabia que tinham cometido erros, de forma a alertá-los relativamente aos mesmos. Este foi um momento a salientar desta aula dado o seu caráter formativo para os alunos, já que, a metodologia usada creio que privilegiou a aprendizagem dos alunos, não os colocando em situações desconfortáveis.

Após ter sido feita a correção, indiquei aos alunos o que deveriam fazer: queria que se concentrassem na resolução da ficha de problemas que tinha sido preparada e que só tinham sidos apresentados no quadro e discutidos em grande grupo, duas das dez tarefas propostas. Esta indicação serviria para quem não tivesse dúvidas que quisessem esclarecer. Aos alunos que queriam ver esclarecidas as suas dúvidas, fui circulando pela sala de modo a poder auxiliá-los.

Antes de isto ter acontecido, e tendo em conta aquilo que observei em duas questões-aula (utilização incorreta das razões trigonométricas; confusão com qual das razões trigonométricas utilizar ou até mesmo, não conseguir aplicar nenhuma das razões trigonométricas), optei por um caminho que não tenho a certeza de ser o mais correto, mas que na altura me pareceu adequado. Dirige-me aos alunos aos quais correspondem estas duas questões-aula, dizendo-lhes que eles iriam realizar um trabalho diferente da restante turma: teriam de me entregar numa folha à parte, até ao final da aula, a resolução de exercícios do manual (exercícios esses que cobriam os erros que observei nas resoluções das questões-aula dos mesmos) e que caso isso não acontecesse toda a turma levaria como trabalho de casa esses mesmos exercícios. Envolver toda a turma neste trabalho foi uma forma de os pressionar a trabalhar durante toda a aula, o que redundaria em seu próprio benefício. Mais uma vez reitero: não sei se foi o mais correto do ponto de vista pedagógico.

O terceiro momento refere-se à apresentação e discussão das tarefas da ficha (Anexo 20) que foi iniciada na aula anterior. Tal como já tinha acontecido em aulas anteriores, cujo foco era a consolidação dos conteúdos lecionados, estes são momentos onde é possível fazer uma panóplia de chamadas de atenção. Este é um aspeto a destacar desta aula: as constantes salvaguardas que foi possível fazer.

O teste de avaliação sumativa iria contemplar três tópicos: Trigonometria, Inequações e Probabilidades, com especial enfoque na Trigonometria. Um dos aspetos não tão bem conseguidos foi o facto de só ter conseguido revisitar a resolução de inequações com os alunos, não me tendo ocorrido fazer a abordagem às probabilidades, nem que fosse, pelo menos, relembrar a lei de Laplace. No entanto, tendo apenas relembrado a resolução de inequações, fiz uma série de chamadas de atenção importantes para as mesmas, destacando, aqui, um pequeno momento positivo.

Foram discutidos, apenas as tarefas três e quatro da ficha, não tendo sido cumprido o plano de aula, dado que se pretendia concluir a mesma. Na apresentação da tarefa quatro – sistema de duas equações envolvendo razões trigonométricas – no final, indico como deve ser apresentada a solução do mesmo, e escrevo a forma de a apresentar, no entanto, essa apresentação é feita de uma forma genérica, e deveria ter utilizado os valores do problema e não ter colocado no par ordenado x e y. Creio, ainda, que deveria ter despendido mais tempo na resolução do sistema já que no teste de avaliação esta foi a tarefa que mais pontos "roubou" aos alunos.

Aponto um último momento positivo da aula, que foi a pequena síntese que fiz no final da aula, relembrando aos alunos que só podem aplicar a Trigonometria quando o triângulo é retângulo e que quando tem problemas devem sublinhar o enunciado de forma a retirar as informações mais importantes, incluindo aquilo que se pretende determinar.

Aula de 23 de abril de 2019

Esta foi uma aula (Plano de aula: Anexo 34) que surgiu com um duplo objetivo: encerrar a Unidade Didática e preparar apresentações dos alunos para o Open Day do Colégio.

Tinha começado a Unidade Didática com várias questões, entre as quais se incluiu a seguinte: "Como posso determinar a altura dos diferentes monumentos/edifícios do Colégio?". A resposta a estas questões foi dada por mim, nesse momento, explicando que, através do estudo da Trigonometria, os alunos seriam capazes de determinar essas alturas. Então, para que os alunos pudessem verificar a Matemática aplicada à realidade, ficou prometido, nessa aula inicial, que iríamos, posteriormente, à rua medir alguns dos edifícios/monumentos do Colégio.

Juntando o útil ao agradável, como o Open Day do Colégio se aproximava, e já que este trabalho iria ser realizado pelos alunos, propusemos-lhes que para além de fazerem simplesmente os cálculos para determinar as alturas dos edifícios/monumentos, realizassem um relatório, em formato de cartolina, onde descreveriam tudo o que tiveram de fazer para conseguir determinar a altura do monumento/edifício que escolheram.

Esta também foi uma boa oportunidade para mostrar como eram feitas as medições dos ângulos antes de existir o avanço científico e tecnológico dos nossos dias, evidenciando que mesmo utilizando instrumentos antigos de medição de ângulos, como o quadrante, este não passa a estar obsoleto.

Esta aula de 45 minutos, dividiu-se em três momentos. O primeiro foi o da formação dos grupos. Também aqui, a professora explicou como se ia processar esta atividade, distribuindo uma folha de registo (Anexo 35), e o que seria feito quando saíssem para a rua. O segundo momento foi o do trabalho na rua, cada grupo ficou junto de edifício/monumento dentro do Colégio, com uma das três professoras (professora titular da turma ou uma das duas professoras estagiárias) e com o auxílio da folha de registo, a professora foi explicando que dados precisavam de ser recolhidos para que a tarefa fosse concretizada. Por fim, depois de se terem efetuado todas as medições necessárias, a turma recolheu à sala, onde se desenrolou o terceiro momento, que diz respeito aos cálculos para a determinação das alturas e ao desenvolvimento de um esboço do relatório final, para que a professora pudesse atestar se faltava alguma coisa, ou se os cálculos estavam todos corretos.

É importante mencionar que esta atividade contou com a colaboração da professora de Educação Visual, que nos auxiliou na construção dos quadrantes; e da professora de Português que reviu o relatório elaborado pelos alunos antes de este ser exposto no Open Day do Colégio.

Capítulo 4 : Métodos e instrumentos de recolha de dados

Neste capítulo apresentam-se os métodos e procedimentos de recolha de dados, começando por sustentar com base em literatura de referência as minhas opções metodológicas. De seguida, elenco os métodos e respetivos instrumentos de recolha de dados, justificando a sua escolha. Faço, depois, uma breve exposição acerca dos participantes do estudo. Na secção seguinte explicito como foi feito o tratamento dos dados e a sua análise. Termino o capítulo fazendo algumas ressalvas no que se refere às questões de natureza ética que se poderão levantar com este estudo.

4.1. Opções metodológicas para a recolha de dados

A abordagem do estudo é a qualitativa uma vez que se pretende entender as aprendizagens que os alunos realizam no que diz respeito aos tópicos de Trigonometria, a partir da resolução de tarefas diversificadas, respondendo-se às seguintes questões i. Que conhecimentos revelam os alunos dos tópicos de Trigonometria?; ii. Como mobilizam os alunos os seus conhecimentos de Trigonometria na resolução de diferentes tipos de tarefas? e, iii. Qual o contributo dos diferentes tipos de tarefas para a aprendizagem dos tópicos de Trigonometria?.

Segundo Bogdan e Biklen (1994), para que uma investigação seja considerada qualitativa tem de ter cinco características, das quais quatro foram contempladas no presente estudo: a) "na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal" (p. 47), pois o estudo foi realizado na sala de aula, e eu própria, enquanto investigadora realizei a recolha de dados; b) "investigação qualitativa é descritiva" (p. 48), isto é, os dados recolhidos no estudo são, predominantemente, de natureza qualitativa e permitem compreender a situação em análise; c) "os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos" (p. 49), já que se procura perceber como os alunos resolvem os diferentes tipos de tarefas e os conhecimentos que evidenciam; d) "os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva" (p. 50), não tendo sido definidas categorias de análise à priori.

Para além ser a professora da turma, durante o decorrer da Unidade Didática, no sentido em que tive a responsabilidade da lecionação dos conteúdos matemáticos, tive de assumir o papel de investigadora, visto que tinha formulado um conjunto de questões que pretendia ver respondidas no âmbito da intervenção realizada. Assim, esta duplicidade de papéis impeliu-me a refletir mais aprofundadamente sobre a minha prática, uma vez que era a mim que me cabia implementar metodologias conducentes a uma aprendizagem significativa, por parte dos alunos, e, simultaneamente, recolher os dados que me eram mais favoráveis para conseguir responder ao estudo em curso. Como refere Ponte (2002), este é um momento ímpar na formação profissional, caracterizando-se como “(…), uma actividade de grande valor para o desenvolvimento profissional dos professores que nela se envolvem activamente” (p.7).

4.2. Métodos e recolha de dados

Tendo em conta a natureza e objetivo do meu estudo recorri à observação participante e à recolha documental (unicamente das resoluções escritas dos alunos) como métodos de recolha de dados. Segundo Aires (2015), a observação “consiste na recolha de informação, de modo sistemático, através do contacto directo com situações específicas” (pp.24-25). A autora advoga que a distinção entre a observação científica e a observação realizada sobre assuntos quotidianos, está na intencionalidade da mesma, sendo que a primeira é efetuada de forma metódica objetivando uma compreensão mais completa do meio envolvente. Portanto, a observação de natureza qualitativa é “fundamentalmente naturalista” (Aires, 2015, p. 25), ocorrendo entre os sujeitos envolvidos no contexto do estudo, caracterizando-se pela sua flexibilidade. Entende-se, assim, que como assumi um duplo papel (professora e investigadora), a observação em causa é a participante uma vez que, como já tive oportunidade de referir, o investigador introduz-se no mundo em que vai estudar com o intuito de o analisar (participante) e a observação permite compreender por exemplo comportamentos ou ritmos de trabalho que de outra forma seriam difíceis de descrever para que exista essa compreensão.

Aires (2015) defende que uma das fases da observação é a recolha de informação. Para suportar aquilo que fui observando, servi-me do registo vídeo das aulas (utilizei uma câmara de filmar) e tirei algumas notas de campo (usei um caderno). A gravação de todas as aulas em formato vídeo e as notas de campo tiradas imediatamente após a lecionação de cada aula (o que tornou este registo mais espontâneo) foram dois alicerces para a reflexão acerca de cada momento da intervenção, sempre com o objetivo de aperfeiçoamento progressivo.

O método principal de recolha de dados foi a recolha documental, sendo que recolhi as resoluções das tarefas propostas ao longo da unidade didática (tarefas do manual escolar e das diversas fichas propostas) as resoluções da questão de aula (Anexo 21) e do teste escrito de avaliação sumativa (Anexo 22).

De forma a que as resoluções recolhidas fossem o mais fidedignas possível, sempre que propunha a realização de uma tarefa pedia que os alunos a resolvessem numa folha que eu pudesse recolher, e que, no momento da correção dessa tarefa a fizessem no caderno diário para que não apagassem a resolução inicial.

Depois de efetuar a recolha das resoluções, no mesmo dia tirava-lhes fotografias, que eram armazenadas numa pasta, no meu computador, com o nome da tarefa. A cada fotografia de uma resolução ficava associada o nome do respetivo aluno, para que em posterior consulta conseguisse aceder rápida e inequivocamente à resolução pretendida. Tentei sempre agilizar este processo, não só porque as resoluções das tarefas recolhidas são recursos para o trabalho dos alunos, mas também porque dava-lhes sempre *feedback* e queria que, enquanto ainda tinham a memória fresca acerca da tarefa, pudessem compreender os pontos que não estavam tão bem conseguidos, a fim de os melhorar.

4.3. Participantes do estudo

Visto que este é um estudo de natureza qualitativa, a seleção dos participantes é fundamental, já que, com um estudo deste tipo se pretende "obter a máxima informação possível para a fundamentação do projecto (…). Por isso, em vez da uniformidade, a amostra na investigação qualitativa procura a máxima variação." (Aires, 2015, p.22). Assim, e em função do objetivo do estudo pensou-se que seria preferível ter uma perspetiva global de toda a turma, tendo em conta a natureza dos dados, as resoluções escritas dos alunos e, essencialmente a heterogeneidade da própria turma, fazendo sentido a existência de uma diversificação no que toca às resoluções. Considerei, portanto, que seria exequível realizar a minha análise sobre a totalidade da turma (18 alunos). Sublinhe-se, no entanto, que em algumas tarefas não tenho 18 resoluções, já que em alguns casos, estas foram realizadas em trabalho colaborativo (díades ou tríades).

4.4. Análise de dados

Para Bogdan e Biklen (1994) a análise dados é um "processo de busca e de organização sistemático" (p.205) dos dados recolhidos, visando "a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspetos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros" (p.205).

Comecei por selecionar as tarefas que, do meu ponto de vista, são mais pertinentes para responder às questões de investigação, sendo que as respostas a estas são sustentadas através das resoluções que os alunos efetuaram. O conjunto de resoluções dos alunos que servirão para sustentar a minha análise dados são: a página 2 da ficha 11 (Anexo 2); ficha 12 (Anexo 3); ficha 13 (Anexo 11); ficha 13A (Anexo 18); ficha 15 (Anexo 20); questão de aula (Anexo 21) e o teste escrito (Anexo 22). Esta seleção foi feita tendo em conta os seguintes critérios: diversidade no que concerne à tipificação das tarefas – conforme quadro 2.3. –, e, a qualidade relativamente à problemática do estudo e quantidade de dados de que dispunha relativos às resoluções dessas mesmas tarefas, por parte dos alunos.

Depois de selecionadas as tarefas, fiz uma análise sobre todas, onde fui procurar identificar o desempenho dos alunos nos tópicos em estudo, tentei, portanto, encontrar um padrão nas tarefas, conforme a tipologia em que se enquadram. Por exemplo, se estivesse a analisar um problema, interessava-me perceber se os alunos são capazes de implementar uma estratégia, e se dão a resposta correta ao mesmo, tentando compreender a razão pela qual os alunos não o conseguem fazer.

Na fase seguinte foi feita uma análise transversal das tarefas de acordo com os tópicos do Programa e Metas Curriculares (MEC, 2013) portanto, a lógica do programa é a que orienta a primeira secção do capítulo (5.1.). Ainda na secção 5.1., sentiu-se a necessidade de explorar as dificuldades com a simbologia e notação matemáticas expressas pelos alunos, não só pela quantidade, mas também pela frequência com que surgiram. Relativamente à secção 5.2., procurou-se perceber como os alunos aplicam os seus conhecimentos, ou seja, depois de verificar como cada tópico do programa tinha sido mobilizado, interessava perceber se num contexto de demonstração e de resolução de problemas, os alunos seriam capazes de dar resposta às tarefas propostas.

Note-se que há tarefas que serão analisadas por duas vezes, portanto, é necessário verificar em que secção é que se encontram, para se poder compreender qual a perspetiva em análise.

Tendo em vista a conclusão da análise de dados, cada tarefa têm uma síntese associada a uma tabela de frequências absolutas e relativas, nas quais figuram os aspetos mais relevantes para a análise em questão. No final de cada secção do capítulo relativo à análise de dados (5.1. e 5.2.), foi, também, realizada uma síntese para melhor e mais facilmente responder às perguntas formuladas pelo estudo.

Portanto, em relação à estrutura do capítulo, pelo que aqui foi fundamentado, compreende-se que este se encontre organizado segundo as duas primeiras questões de investigação do estudo: uma para os conhecimentos (5.1.) e outra para as competências (5.2.).

Um último aspeto a mencionar é que, em algumas tarefas a análise é feita aluno a aluno, enquanto noutras se opta por uma análise em pares ou em grupos. A diferença na análise tem que ver, precisamente, com os modos de trabalho enquanto estava a ser realizada a tarefa proposta aos alunos, ou seja, quando uma tarefa é realizada a pares, a análise recai sobre a resolução do par, quando uma tarefa é analisada individualmente, significa que foi efetuada individualmente.

4.5. Questões de natureza ética associadas ao estudo

Segundo Bogdan & Biklen (1994) há duas questões que predominam no que se refere à ética, quando se trata de uma investigação envolvendo pessoas: "o consentimento informado e a proteção dos sujeitos contra qualquer espécie de danos" (p. 75). A acrescentar ao facto desta investigação envolver pessoas, estas são menores de idade, o que é outro fator de peso. Assim, e tendo em conta também os métodos de recolha de dados que indiquei, podem levantar-se algumas questões de natureza ética.

Relativamente ao consentimento informado, já tinha sido solicitado aos Encarregados de Educação que consentissem que os seus educandos participassem no projeto Educate, no âmbito da prática de ensino supervisionada, e que envolvia a recolha de dados em sala de aula (Anexo 36). Assim, foi explicado a cada EE que se o seu educando não aceitasse participar não iria ser prejudicado em relação aos colegas, bem como em qualquer momento poderia desistir, sem quaisquer represálias para o mesmo, tendo os EE ficado com uma folha com toda esta informação registada.

Todos os alunos participaram normalmente nas atividades da Unidade Didática e todos os EE deram consentimento para a participação dos seus educandos.

Nesta autorização foi igualmente pedido o consentimento para a gravação áudio e vídeo das aulas da prática de ensino supervisionado, salvaguardando que estas gravações não seriam utilizadas para outro fim que o âmbito do projeto. Ainda nesta questão da privacidade dos alunos, os nomes destes nunca são mencionados ao longo deste estudo, tendo-se optado por atribuir uma letra maiúscula a cada um dos participantes.

Portanto, e conforme a Carta de Ética do Instituo da Educação (2016), esta autorização abrange todos os possíveis pontos de natureza ética que se podiam levantar no decorrer da minha investigação, possibilitando o tratamento dos dados necessários, protegendo os dados pessoais dos alunos.

Capítulo 5 : Análise de dados

Neste capítulo é apresentada a análise dos dados recolhidos de acordo com as questões de investigação formuladas, sendo que são estas que orientam a organização do presente capítulo. Nas secções 5.1.4. e 5.2.3. farei uma síntese dos resultados das secções 5.1. e 5.2., respetivamente, relacionando as aprendizagens realizadas pelos alunos com o tipo de tarefas propostas.

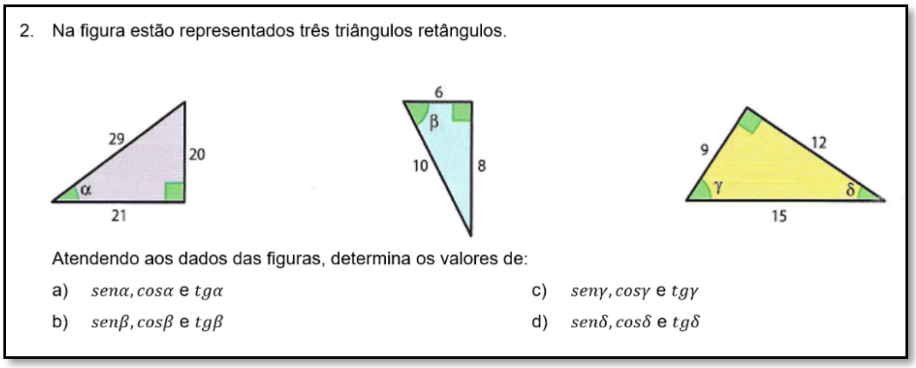
5.1. Conhecimentos revelados pelos alunos

Nesta primeira secção do capítulo pretende-se perceber os conhecimentos que os alunos adquiriram, ao longo da unidade didática. A primeira subsecção (5.1.1.) apresenta uma estrutura semelhante aos tópicos que integram o programa e metas curriculares (MEC, 2013), onde se objetiva compreender os conhecimentos que os alunos revelaram durante a intervenção. Saliento que se sentiu necessidade de abrir as secções 5.1.2. e 5.1.3. devido à frequência com que surgiram erros ligados à notação e simbologia matemática, bem como dificuldades nos cálculos algébrico e numérico, constituindo alguns obstáculos no processo de aprendizagem da Trigonometria.

5.1.1. Tópicos de Trigonometria

5.1.1.1. Razões trigonométricas de um ângulo agudo

Interessa compreender em que medida é que os alunos conseguem reconhecer as razões trigonométricas, isto é, as suas definições. O primeiro momento onde os alunos se confrontaram com este tópico das razões trigonométricas, foi na primeira aula da intervenção (dia 14 de fevereiro de 2019), aquando a realização da segunda página da ficha 11 (Anexo 2). Assim, importa observar as resoluções da pergunta 2, cujo enunciado se apresenta de seguida (figura 5.1.).


2. Na figura estão representados três triângulos retângulos.

Atendendo aos dados das figuras, determina os valores de:

a) $sen\alpha, cos\alpha$ e $tg\alpha$

b) $sen\beta, cos\beta$ e $tg\beta$

c) $sen\gamma, cos\gamma$ e $tg\gamma$

d) $sen\delta, cos\delta$ e $tg\delta$

***Figura 5.1**: Enunciado da pergunta 2 da ficha 11*

Das 14 resoluções recolhidas desta pergunta, verifica-se, de uma forma geral, que os alunos conseguem escrever corretamente as razões pedidas, surgindo várias formas para chegar a essa razão. Alguns alunos utilizam as abreviaturas para mobilizarem as razões trigonométricas, isto é, escrevem, por exemplo, $sen = \frac{O}{H}$, onde O representa o cateto oposto e o H a hipotenusa, como podemos observar nas resoluções seguintes (figura 5.2. e figura 5.3.):

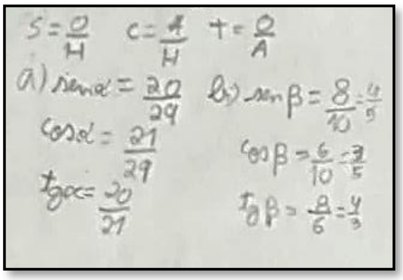


***Figura 5.2**: Resolução das perguntas 2 a) e b) da ficha 11 pelo aluno C*

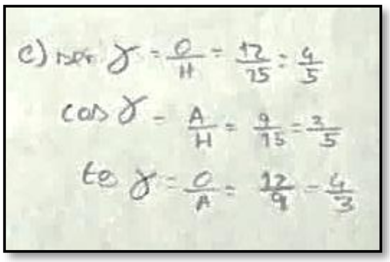


***Figura 5.3**: Resolução pergunta 2 c) da ficha 11 pela aluna Q*

Há ainda uma aluna que opta por fazer a representação do triângulo retângulo, para todas as alíneas, no seu caderno, identificando e escrevendo os nomes de cada um dos catetos, utilizando outras abreviaturas como "c.a." e "c.o.", referindo-se, ao cateto adjacente e ao cateto oposto, respetivamente (figura 5.4.). Esta aluna nomeia, ainda, os vértices, através de letras maiúsculas, para poder escrever as razões trigonométricas através da simbologia matemática.

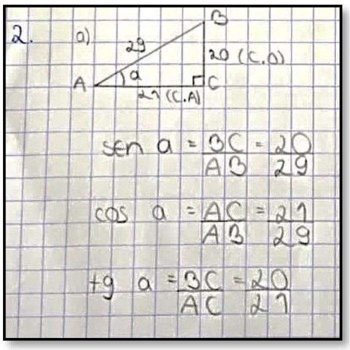


***Figura 5.4**: Resolução pergunta 2 a) da ficha 11 pela aluna D*

A maioria dos alunos (13 em 14), consegue escrever, de forma correta, a razão trigonométrica correspondente ao ângulo, seja pela mobilização de abreviaturas como auxiliares para escrever o quociente devidamente (7), seja pela aplicação direta que fazem da definição (6). Portanto, $93\% \ (= 50\% + 43\%)$ dos alunos consegue mobilizar as razões trigonométricas de forma correta, como podemos observar pela tabela abaixo (tabela 5.1.). Note-se que os 100% aqui correspondem a 14 alunos (total de resoluções disponíveis para análise), relembrando que na sua totalidade a turma tem 18 alunos.

***Tabela 5.1**: Respostas dos alunos à pergunta 2 – ficha 11*

Alunos que	**Frequência Absoluta (n.º de alunos)**	**Frequência relativa (em %)**
Aplicam diretamente a razão trigonométrica	7	50%
Utilizam abreviaturas para mobilizar as razões trigonométricas	6	43%
Não dá resposta	1	7%
Total	14	100%

Já no teste escrito de avaliação sumativa (Anexo 22), realizado no final da intervenção (25 de março de 2019), são várias as perguntas onde os alunos têm de ser capazes de reconhecer as razões trigonométricas convenientemente. A pergunta 3, cujo enunciado se apresenta na figura 5.5., exige que os alunos consigam compreender qual a razão trigonométrica a utilizar, tendo em conta os dados fornecidos no enunciado. Assim, é possível compreender se efetivamente, no final da unidade didática, os alunos eram capazes de definir as razões trigonométricas.

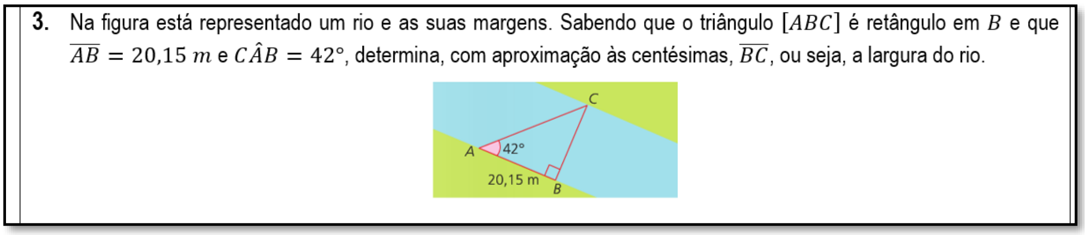

3. Na figura está representado um rio e as suas margens. Sabendo que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B e que $\overline{AB} = 20{,}15\ m$ e $C\hat{A}B = 42°$, determina, com aproximação às centésimas, $\overline{BC}$, ou seja, a largura do rio.

***Figura 5.5**: Enunciado da pergunta 3 do teste escrito*

Verifica-se que, dos 18 alunos, apenas dois não escrevem o quociente correspondente à razão trigonométrica, corretamente. Um destes alunos (figura 5.6.) opta pelo seno (ao invés da tangente), não escrevendo corretamente a razão escolhida, já que regista que o seno do ângulo de 42° é dado pelo quociente entre $\overline{BC}$ e $\overline{AB}$, tendo misturado a definição de duas razões trigonométricas diferentes: o seno e a tangente.

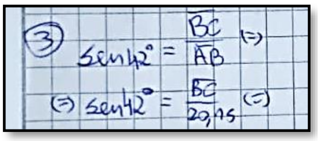


***Figura 5.6**: Parte da resolução da pergunta 3 do teste escrito pelo aluno E*

O outro caso é de uma aluna que opta pela razão trigonométrica correta – tangente – (figura 5.7.), no entanto, escreve, erradamente, a sua definição, colocando no numerador o cateto adjacente e no denominador o cateto oposto.

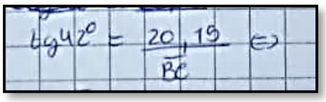


***Figura 5.7:** Parte da resolução da pergunta 3 do teste escrito pela aluna G*

Há ainda a destacar a resolução efetuada por dois alunos, que ao invés de aplicarem a tangente do ângulo correspondente, escolheram aplicar, sucessivamente, o cosseno e o seno desse mesmo ângulo. É possível observar (figura 5.8.) que a determinação correta da segunda razão trigonométrica está dependente do sucesso da primeira razão trigonométrica, já que a hipotenusa é comum à definição de ambas as razões.

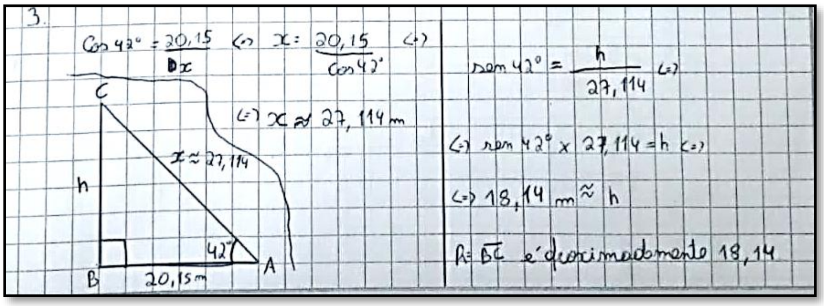


Figura 5.8*: Resolução da pergunta 3 do teste escrito pelo aluno P*

É interessante, ainda, verificar que alguns alunos utilizam abreviaturas como forma de mobilização das razões trigonométricas, como atesta a figura 5.9., onde o aluno antes de escrever os comprimentos que dizem respeito aos catetos oposto e adjacente, evoca a definição da respetiva razão trigonométrica.

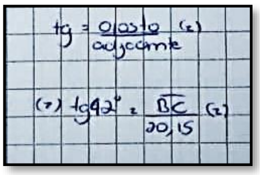


Figura 5.9*: Parte da resolução da pergunta 3 do teste escrito pelo aluno R*

Portanto, de uma forma geral, os alunos conseguiram reconhecer a razão trigonométrica associada à pergunta, como evidencia a tabela 5.2., existindo apenas dois alunos (11%) que não conseguem aplicar devidamente a razão trigonométrica.

Tabela 5.2*: Respostas dos alunos à pergunta 3 – teste escrito*

Alunos que	**Frequência Absoluta (n.º de alunos)**	**Frequência relativa (em %)**
Aplicam a razão trigonométrica certa	16	89%
Aplicam incorretamente a razão trigonométrica	2	11%
Total	18	100%

5.1.1.2. Invariância nas razões trigonométricas de um ângulo agudo

Para compreender se os alunos entenderam que as razões trigonométricas dependem exclusivamente do ângulo em questão, ou seja, que são invariantes, foi proposta a ficha 12 (Anexo 3), que deveria ser resolvida com o auxílio do software Geogebra. Assim, interessa analisar as perguntas 2.2; 2.3, 3.3. e 3.4. da ficha de trabalho. Esta ficha foi resolvida na 2.ª aula da intervenção, no dia 21 de fevereiro de 2019. Apresenta-se, de seguida o enunciado da pergunta 2 (figura 5.10).

2. Movimenta, agora, o ponto C. Repara que obténs novos triângulos retângulos.
   2.1. Compara o valor do ângulo $B\hat{A}C$ com o valor que registaste na pergunta 1.1. O que verificas?

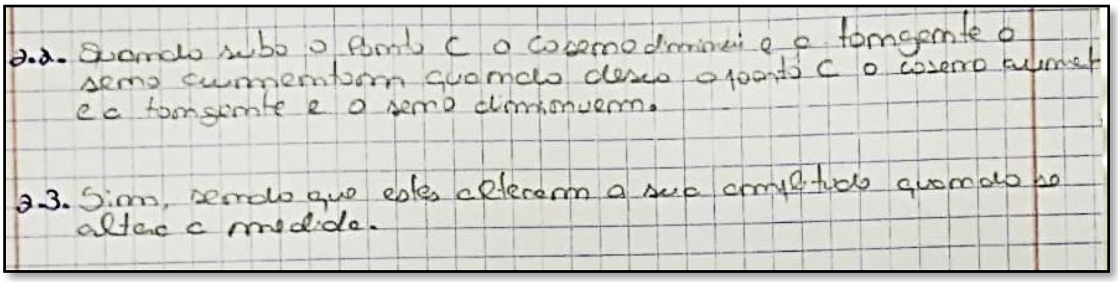
   2.2. O que parece acontecer aos valores das razões trigonométricas?

   2.3. O valor encontrado para cada razão depende das medidas dos ângulos dos triângulos considerados? Explica o teu raciocínio.

***Figura 5.10**: Enunciado da pergunta 2 da ficha 12*

Da observação que fiz da aula e do tipo de resposta que surge para esta pergunta verificam-se três tipos de resoluções.

As resoluções do tipo I são aquelas onde os alunos escrevem tudo corretamente, apresentando as justificações adequadas, o que evidencia que estes realizaram a devida exploração da tecnologia. Estes alunos conseguem verificar que ao movimentarem o ponto C, alteram o comprimento do cateto oposto ao ângulo α, e o comprimento da hipotenusa e, portanto, as razões trigonométricas que incluem o cateto oposto (seno e tangente) sofrem as alterações de forma proporcionalmente direta à movimentação feita; já com o cosseno acontece precisamente o contrário (inversamente proporcional). A figura 5.11. exemplifica uma resolução do tipo I.


2.2. Quando subo o ponto C o coseno diminui e a tangente o seno aumentam quando desço o ponto C o coseno aumenta e a tangente e o seno diminuem.

2.3. Sim, sendo que estes alteram o seu comprimento quando se altera a medida.

***Figura 5.11**: Resolução perguntas 2.2. e 2.3. da ficha 12 pelos alunos R e E*

As resoluções do tipo II dizem respeito aos alunos que demonstram não ter explorado, na totalidade, as potencialidades do recurso, o Geogebra, já que registam apenas uma deslocação para o ponto C, não explicitando, claramente, a relação entre os diferentes valores nas razões trigonométricas e a movimentação desse ponto. A figura 5.12. ilustra um destes tipos de resolução. Na sua resposta à 2.3., este par de alunas atingiu aquilo que se pretendia com a realização desta tarefa: compreender que as razões trigonométricas dependem exclusivamente do valor da amplitude do ângulo. No entanto, pela sua resposta à 2.2., as alunas não expressam isso, pois verificam que o seno e a tangente diminuem e que o cosseno aumenta, não tendo escrito o que tem de acontecer ao ponto C para que isso suceda. Adicionalmente, com esta resposta, as alunas evidenciam que só deslocaram o ponto C numa direção (para baixo), tendo ficado em falta verificar o que aconteceria se movesse esse ponto na direção contrária (para cima).

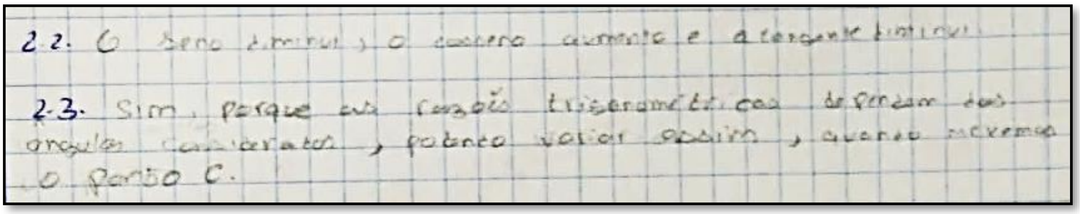


Figura 5.12*: Resolução perguntas 2.2. e 2.3. da ficha 12 pelas alunas Q e D*

As resoluções do tipo III referem-se aos alunos que, à semelhança do que observámos nas resoluções do tipo II, só conseguiram movimentaram o ponto C numa das direções possíveis (para cima ou para baixo), mas não conseguem concluir nada acerca da relação entre o ângulo e a razão trigonométrica, uma vez que não apresentam resposta à pergunta 2.3. (figura 5.13.).

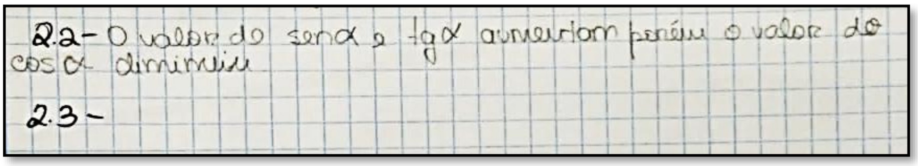


Figura 5.13: *Resolução perguntas 2.2. e 2.3. da ficha 12 pelas alunas N e A*

Pela observação que fiz enquanto os alunos tentavam resolver as perguntas, todos os grupos conseguiram compreender que o ponto C admitia dois deslocamentos possíveis, para cima e para baixo. No entanto, só 3 grupos de alunos é que conseguiram relacionar ambos os deslocamentos com as razões trigonométricas (resoluções do tipo

I). Os restantes grupos (4) não apresentaram mais do que um deslocamento para o ponto C (resoluções do tipo II e III), dos quais 3 grupos conseguiram extrair conclusões somente com uma possibilidade de movimentação desse ponto. Desta forma, percebe-se, que a maioria dos alunos ($86\% = 43\% + 43\%$), através da exploração com o Geogebra, conseguiu concluir o que se pretendia, elaborando conjeturas, sendo que uma parte destes alunos consegue justificar as suas generalizações (tabela 5.3.). Assim, por ordem de frequência, as resoluções do tipo II e III foram as que mais surgiram, e, por fim as do tipo I.

Tabela 5.3: *Respostas dos alunos à pergunta 2 – ficha 12*

Resoluções do tipo	**Frequência absoluta (n.º de grupos)**	**Frequência Relativa (em %)**
I	3	43%
II	3	43%
III	1	14%
Total (grupos)	7	100%

A análise das respostas dos alunos às perguntas 3.3. e 3.4. (figura 5.14.), permitirá compreender se estes efetivamente conseguiram atingir o cerne desta ficha: verificar que as razões trigonométricas dependem unicamente do valor do ângulo correspondente.

3. Agora, movimentando o ponto B, responde às seguintes perguntas:
   3.1. Compara o valor do ângulo $B\hat{A}C$ com o valor que registaste na pergunta 1.1. O que verificas?
   3.2. Os triângulos obtidos são semelhantes ao inicialmente construído? Explica o teu raciocínio.
   3.3. Compara os valores das razões trigonométricas obtidas em 1.2. com os valores obtidos após a movimentação do ponto B. O que verificas?
   3.4. O valor encontrado para cada razão depende das medidas dos lados dos triângulos considerados? Explica o teu raciocínio.

Figura 5.14*: Enunciado da pergunta 3 da ficha 12*

Nas questões 3.3. e 3.4., as respostas dos alunos dividem-se, também, em três tipos. As resoluções do tipo I dizem respeito aos alunos que afirmam que o valor das razões trigonométricas depende das medidas dos lados do triângulo; as do tipo II referem-se aos alunos que mencionam que existe invariância das razões trigonométricas e, por fim, as do tipo III que respeitam aos alunos que não apresentam uma conclusão.

As resoluções do tipo I e III evidenciam que os alunos não exploraram todas as possibilidades para a posição do ponto B. Tal como já tinha acontecido na pergunta 2 com a movimentação do C, os alunos destes dois grupos limitam-se a um dos casos, apresentando na sua resposta somente uma variação para as razões trigonométricas, como é exemplificado na figura 5.15. A questão da proporcionalidade, aqui mencionada por este par de alunas (resolução do tipo I), creio que é levantada pelo facto, de na pergunta 3.2., os alunos terem utilizado a semelhança de triângulos, logo, depois de provada da semelhança entre quaisquer dois pares de triângulos, os seus comprimentos são proporcionais. Contudo, com a movimentação deste ponto B, a proporcionalidade ocorre com todos os lados do triângulo, portanto, a razão é sempre a mesma (no tópico das semelhanças de triângulos, esta é a razão de semelhança), tendo faltado, a este par, observar este pormenor, o que reforça aquilo que referi acima: não forma explorados todos os casos possíveis para a movimentação do ponto B.

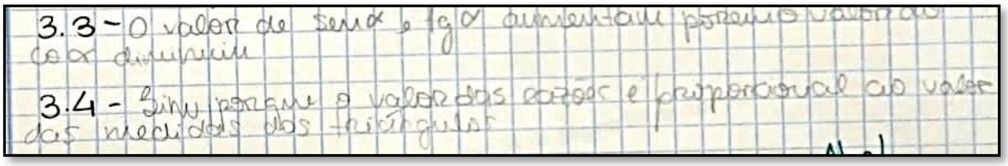


***Figura 5.15**: Resolução perguntas 3.3. e 3.4. da ficha 12 pelas alunas N e A*

Em nenhuma das resoluções do tipo I e III é explicita a relação entre a movimentação do ponto B e as variações das razões trigonométricas. Quer-se com isto dizer que, apesar destes alunos só terem apresentado um caso para o deslocamento do ponto B, poderiam tê-lo feito de forma mais completa, acrescentando o que ocorre às razões quando é feito esse deslocamento. Talvez, esta falta de articulação, justifique a ausência de conclusão na resolução de um dos pares (figura 5.16.)

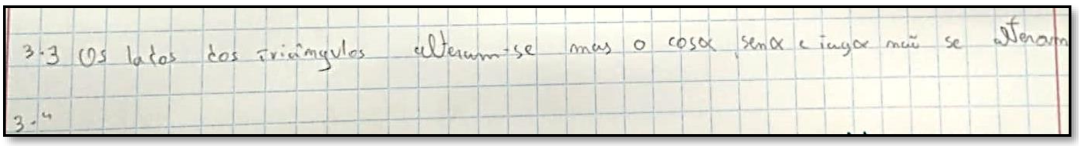
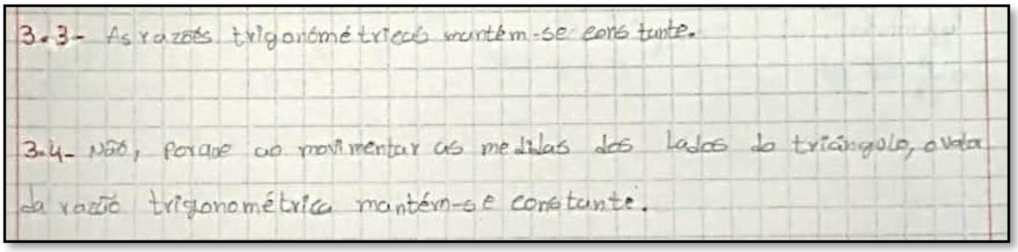


***Figura 5.16**: Resolução perguntas 3.3. e 3.4. da ficha 12 pelos alunos M e C*

Olhando para resoluções do tipo II, verifica-se que os alunos que conseguiram concluir o que se pretendia, foram os que tiraram partido da tecnologia, o que lhes permitiu observar a relação entre o deslocamento do ponto B e os comprimentos dos lados de cada triângulo que iam obtendo, e, consequentemente, o valor das razões trigonométricas (figura 5.17.). Pela observação desta resolução é notória a utilização da tecnologia, já que apesar de ter sido tirada essa conclusão, não foi feito o registo de como se sucede a variação das razões trigonométricas, e como é que isso se liga com a movimentação do ponto B.


3.3- As razões trigonométricas mantêm-se constante.

3.4- Não, porque ao movimentar as medidas dos lados do triângulo, o valor da razão trigonométrica mantém-se constante.

Figura 5.17: *Resolução perguntas 3.3. e 3.4 da ficha 12 pelos alunos G e I*

Na sua maioria, os alunos conseguiram chegar à conclusão desejada, seguindo-se os que responderam de forma incorreta à pergunta; e por fim, os que não responderam (tabela 5.4.). É importante notar que o universo em análise, para esta questão, são oito grupos, correspondendo o 100% a sete dos oito grupos que foram formados na aula. Assim, é possível concluir que quatro grupos (57%) conseguiram concluir aquilo que se pretendia: a invariância das razões trigonométricas.

Tabela 5.4: *Respostas dos alunos à pergunta 3 – ficha 12*

Resoluções do tipo	**Frequência absoluta (n.º de grupos)**	**Frequência Relativa (em %)**
I	2	29%
II	4	57%
III	1	14%
Total	7	100%

5.1.1.3. Intervalo de variação das razões trigonométricas de um ângulo agudo

Este é um tópico matemático que é mais difícil de analisar devido à existência de poucos dados. No entanto, creio que é possível compreender se os alunos conseguiram reconhecer o intervalo de variação das razões trigonométricas de um ângulo agudo quando têm de justificar porque optam pela solução positiva na resolução da equação da Fórmula Fundamental da Trigonometria (FFT). A pergunta 4a) da questão de aula (Anexo 21), realizada no dia 19 de março de 2019 (figura 5.18), permite aos alunos argumentarem, através do intervalo de variação da razão trigonométrica em questão, a solução por que optam.

4. Sabendo que α é um ângulo agudo e que $cos\ \alpha = \frac{2}{3}$, determine o valor exato de:

a) $sen\ \alpha$

***Figura 5.18**: Enunciado da pergunta 4a) da questão de aula*

Dos 17 alunos que realizaram a questão de aula, nove sentiram a necessidade de argumentar a rejeição da solução negativa. Porém, nem todos estes nove recorreram ao intervalo de variação do seno – razão trigonométrica em causa –, tendo havido casos de alunos que justificaram simplesmente que o alfa é um ângulo agudo e, portanto, o seu seno nunca poderá tomar valores negativos. De qualquer das formas, aqueles que justificaram por meio do intervalo de variação, utilizaram o intervalo correto, como podemos observar na figura 5.19.

$\cancel{-\frac{\sqrt{5}}{3}}$, porque $0 < sen\ \alpha < 1$.

***Figura 5.19**: Parte da resolução da pergunta 4a) da questão de aula pelo aluno I*

Portanto, aquilo que aqui foi mencionado pode ser sintetizado na tabela 5.5, observando que 24% da turma reconhece o intervalo de variação da razão trigonométrica seno.

Tabela 5.5: *Respostas dos alunos à pergunta 4a) – questão de aula*

Alunos que	Frequência absoluta (n.º de alunos)	Frequência Relativa (em %)
Utilizam adequadamente o intervalo de variação das razões trigonométricas	4	24%
Não utilizam o intervalo de variação das razões trigonométricas	5	29%
Não justificam	8	47%
Total	17	100%

Outra pergunta que poderá auxiliar na análise deste tópico é a primeira pergunta do teste escrito (Anexo 22), que foi realizado no final da intervenção no dia 25 de março de 2019 (figura 5.20). Apesar de esta ser uma pergunta de escolha múltipla, possibilita compreender se efetivamente os alunos conseguiram perceber o intervalo de variação das razões trigonométricas, uma vez que apresenta uma opção com uma razão trigonométrica negativa e duas opções em que o seno e o cosseno apresentam valores superiores ou iguais a um.

1. Num triângulo retângulo em que α é um ângulo agudo, qual das seguintes igualdades é verdadeira?

(A) $sen\,\alpha = -0{,}2$ (B) $tg\,\alpha = 1{,}5$ (C) $\cos\alpha = 2$ (D) $sen\,\alpha = 1$

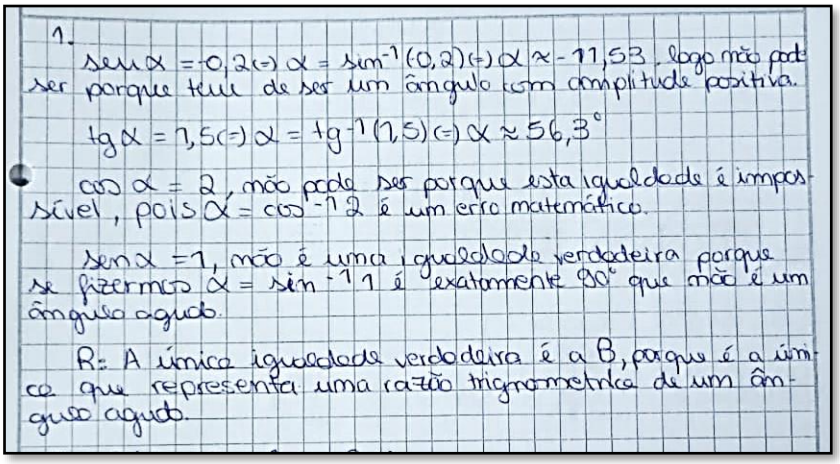
Figura 5.20: *Enunciado da pergunta 1 do teste escrito*

De toda a turma (18 alunos), as respostas dividem-se entre a opção B e D, o que mostra, que os alunos compreenderam que o valor das razões trigonométricas de um ângulo agudo nunca pode ser negativo, nem o cosseno pode admitir o valor dois.

A grande maioria dos alunos opta pela resposta D, creio que pelas sucessivas vezes que se referia que o seno de um ângulo agudo está entre zero e um. No entanto, nunca pode atingir o valor de um, pela definição da razão trigonométrica, o que implicaria que o cateto oposto teria o mesmo comprimento que a hipotenusa, contrariando as regras matemáticas.

Há sete alunos que escolhem a opção correta, tendo duas alunas justificado a sua resposta. Curiosamente ambas as alunas recorreram à calculadora científica para responderem à questão.

A aluna, cuja resolução é aqui apresentada na figura 5.21., vai experimentar todas as alíneas na máquina, justificando porque vai rejeitando cada uma delas.


1.

$sen\,\alpha = -0,2 \Leftrightarrow \alpha = sin^{-1}(-0,2) \Leftrightarrow \alpha \approx -11,53$, logo não pode ser porque tem de ser um ângulo com amplitude positiva.

$tg\,\alpha = 1,5 \Leftrightarrow \alpha = tg^{-1}(1,5) \Leftrightarrow \alpha \approx 56,3^\circ$

$cos\,\alpha = 2$, não pode ser porque esta igualdade é impossível, pois $\alpha = cos^{-1} 2$ é um erro matemático.

$sen\,\alpha = 1$, não é uma igualdade verdadeira porque se fizermos $\alpha = sin^{-1} 1$ é exatamente 90° que não é um ângulo agudo.

R: A única igualdade verdadeira é a B, porque é a única que representa uma razão trigonométrica de um ângulo agudo.

Figura 5.21*: Resolução da pergunta 1 do teste escrito pela aluna L*

Portanto, de uma forma geral, nesta pergunta, os alunos (61%) não respondem corretamente, evidenciando que não reconhecem o intervalo de variação das razões trigonométricas, como reflete a tabela seguinte (5.6.).

Tabela 5.6: *Respostas dos alunos à pergunta 1 – teste escrito*

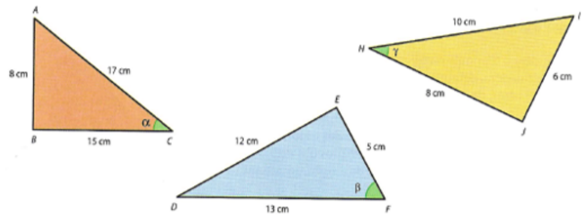
Alunos que	**Frequência absoluta (n.º de alunos)**	**Frequência Relativa (em %)**
Respondem corretamente	7	39%
Respondem erradamente	11	61%
Total	18	100%

5.1.1.4. Relações entre as razões trigonométricas de um mesmo ângulo

Cabe neste ponto compreender se os alunos conseguem reconhecer as relações entre as razões trigonométricas de um mesmo ângulo. Estas relações são utilizadas na determinação do valor de razões desconhecidas, a partir do conhecimento de uma das razões trigonométricas e, também, para realizar demonstrações (situações que serão analisadas).

A primeira vez com que se deparam com estas relações, é na ficha 13 (Anexo 11) realizada na aula do dia 12 de março de 2019, (figura 5.22). Pretendia-se com esta ficha que os alunos conjeturassem acerca das relações entre as razões trigonométricas: Fórmula Fundamental da Trigonometria (FFT) e relação entre as três razões trigonométricas, alíneas c) e b), respetivamente.

Na figura seguinte estão representados três triângulos e os comprimentos dos seus lados.



a) Mostra que os triângulos da figura são retângulos.

b) Determina as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de cada um dos ângulos assinalados na figura. Compara o valor da razão tangente com o quociente entre as razões seno e cosseno de cada ângulo. O que verificas?

c) Para cada ângulo assinalado na figura, determina o valor de $(sen\alpha)^2 + (cos\alpha)^2$. O que verificas?

***Figura 5.22**: Enunciado das alíneas a); b) e c) da ficha 13*

Na alínea b) há dois tipos de resolução: os que conseguem concluir a relação pretendida, apresentando os cálculos necessários e os que apresentam somente os cálculos, sem conseguirem concluir nada.

Os alunos que fazendo todos os cálculos conseguem concluir a relação pretendida mobilizam adequadamente as razões trigonométricas. Um exemplo deste tipo de resolução é que se segue (figura 5.23.), onde é possível observar que depois dos alunos escreverem as razões trigonométricas referentes a cada ângulo, efetuam o quociente entre o seno e cosseno do mesmo ângulo, concluindo que esse é o valor da tangente desse ângulo.

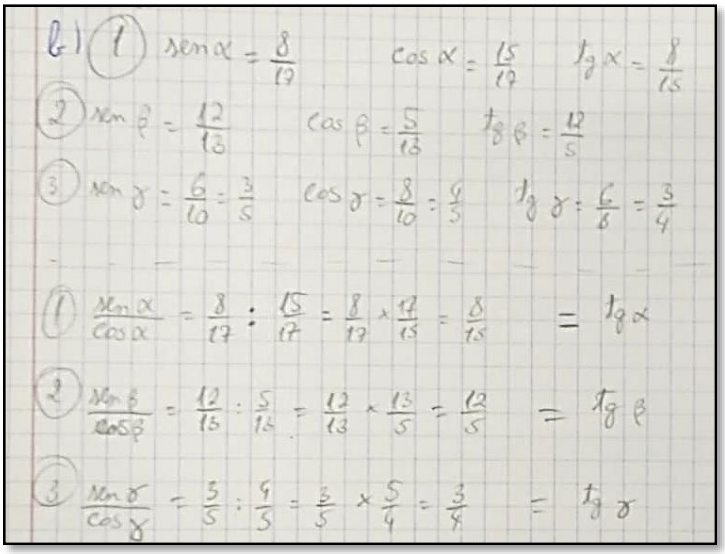


Figura 5.23: Resolução da alínea b) da ficha 13 pelos alunos B e S

Já os pares de alunos que apresentam apenas os cálculos, não fazendo o quociente entre o seno e cosseno, não concluindo nada após o cálculo, não evidenciam ter concluído a relação trigonométrica pretendida (figura 5.24).

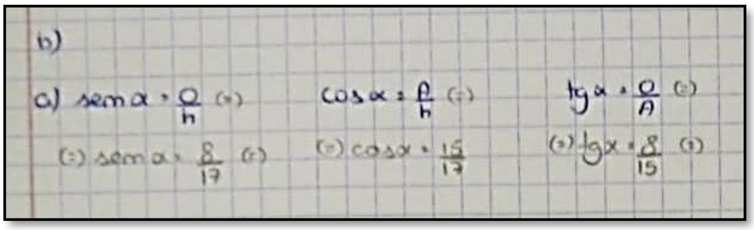


Figura 5.24: Parte da resolução da alínea b) da ficha 13 pelos alunos R e E

De forma geral, podemos sintetizar a análise da alínea b) de acordo com a tabela 5.7., onde podemos observar que de todas as resoluções analisadas (8 dos 9 pares formados para a aula), a maioria dos alunos (75%) conseguiu concluir o que se pretendia.

Tabela 5.7: Respostas dos alunos à pergunta b) – ficha 13

Alunos que	**Frequência absoluta (n.º de pares)**	**Frequência Relativa (em %)**
Concluem a relação	6	75%
Não concluem a relação	2	25%
Total (em pares)	8	100%

Relativamente à alínea c) é possível também distinguir dois tipos de resoluções, que se referem aos pares de alunos que conseguem concluir a Fórmula Fundamental da Trigonometria e os pares de alunos que não o conseguem.

Verifica-se que a maioria dos pares de alunos apresenta os cálculos necessários para conseguir concluir a igualdade desejada. Apresenta-se, de seguida, uma resolução que ilustra este facto (figura 5.25).

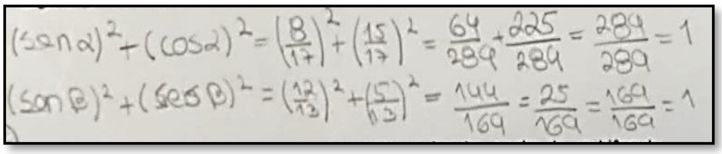


***Figura 5.25**: Parte da resolução da alínea c) da ficha 13 pelas alunas F e O*

Os pares de alunos que não conseguem concluir o pretendido são aqueles que cometeram erros no cálculo das razões trigonométricas, não respondendo à pergunta. Na figura 5.26. é possível observar que os erros cometidos pelos alunos, a nível algébrico, e o facto de não terem feito a simplificação da fração obtida, não lhes permitiu concluir a FFT.

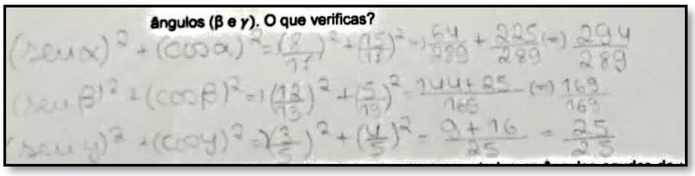


***Figura 5.26**: Resolução alínea c) da ficha 13 pelos alunos L e J*

Assim, é possível concluir, que a maioria dos pares (75%) de alunos chega à FFT, existindo apenas dois pares que não o conseguem fazer (tabela 5.8.). Um por erros algébricos e outro por não ter apresentado qualquer resposta.

***Tabela 5.8**: Respostas dos alunos à pergunta c) – ficha 13*

Alunos que	**Frequência absoluta (n.º de pares)**	**Frequência Relativa (em %)**
Concluem a FFT	6	75%
Não concluem a FFT	2	25%
Total (em pares)	8	100%

Determinação de valores exatos das razões trigonométricas

A pergunta 2 da ficha 13A (Anexo 18), foi o primeiro momento onde puderam aplicar estas relações, percebendo que estas possibilitam, a partir do conhecimento do valor de uma das razões trigonométricas, determinar as que estão em falta (figura 5.27.). Esta ficha de trabalho foi realizada no dia 15 de março de 2019.

2. Resolve, no espaço seguinte, o exercício 34 da página 58 do manual.

34 $[KLM]$ é um triângulo retângulo em K.

Sabe-se que $\text{sen}\,\hat{L} = \frac{21}{29}$.

Calcula os valores exatos de $\cos \hat{L}$ e de $\text{tg}\,\hat{L}$.

***Figura 5.27**: Enunciado da pergunta 2 da ficha 13A*

Dos 18 alunos da turma, nove não responderam à questão. Dos restantes consegue-se dividir as resoluções em dois tipos.

A resolução do tipo I que diz respeito aos alunos que percebem que têm de mobilizar as relações entre as razões trigonométricas para conseguirem calcular os valores exatos das razões trigonométricas em falta.

A resolução que se segue (figura 5.28), exemplifica este tipo de resolução. O aluno começa por escrever os dados que tem, e aquilo que pretende determinar e, na mesma linha, regista as relações entre as razões trigonométricas que lhe permitem fazer esses cálculos.

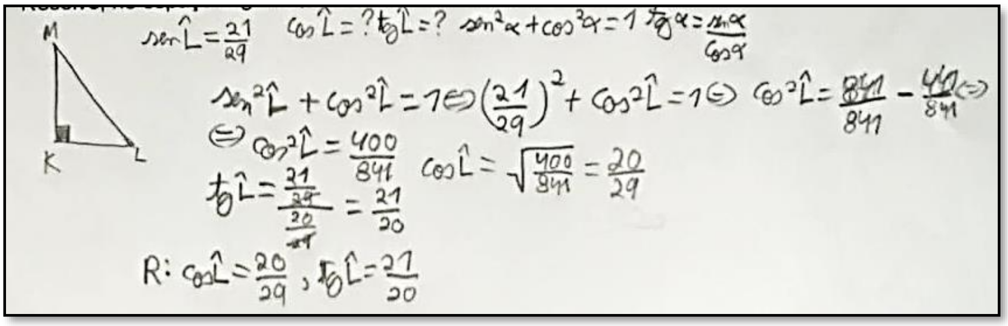


***Figura 5.28**: Resolução da pergunta 2 da ficha 13A pelo aluno C*

Relativamente ao outro tipo de resolução (II), que se refere aos alunos que não utilizam as relações entre as razões trigonométricas, conseguimos distinguir duas diferentes abordagens à pergunta.

Uma primeira abordagem, onde os alunos recorrem ao Teorema de Pitágoras para encontrem os valores das razões trigonométricas em falta. Creio que alguns alunos optaram por esta via dada a forma como a pergunta está formulada, levando-os a fazerem uma representação do triângulo em causa e a retirarem conclusões acerca dos comprimentos desse triângulo. Sabendo que o seno, por definição, é o quociente entre a medida do cateto oposto e a hipotenusa, os alunos optaram por fazer corresponder os valores que traduzem o quociente do seno, aos comprimentos dos lados do triângulo (figura 5.29). Ora, apesar dos cálculos estarem corretos, e efetivamente o resultado ser o mesmo, o raciocínio não está certo, já que esta lógica admite que a fração que traduz o seno do ângulo L, é única, esquecendo o facto de que esta pode estar simplificada e, portanto, os lados do triângulo não terão os comprimentos referidos. Claro está, que se obterão infinitos triângulos semelhantes, considerando que a fração terá infinitas frações equivalentes (daí o resultado final coincidir), no entanto, não se pode assumir que são estes os valores dos comprimentos deste triângulo.

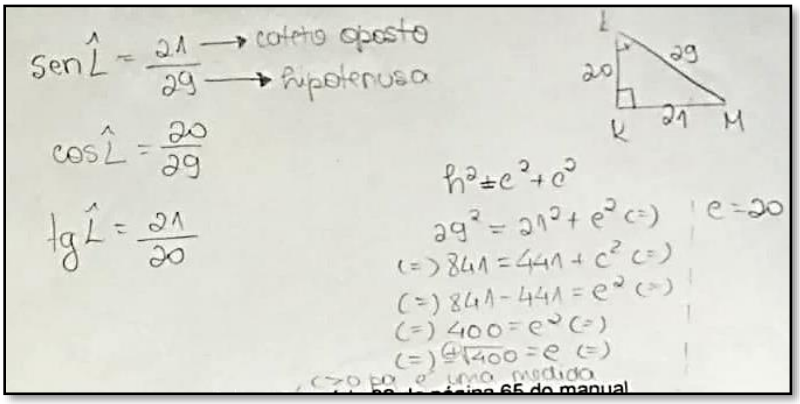


***Figura 5.29**: Resolução da pergunta 2 da ficha 13A pela aluna N*

A outra abordagem escolhida, foi determinar o valor da amplitude do ângulo em L, uma vez que é conhecido o valor do seno, é possível obter um valor aproximado do valor da amplitude do ângulo, e com este valor, determinar o valor das restantes razões trigonométricas pedidas. Mais uma vez, esta abordagem dará os resultados corretos, porém, não é adequada visto que se pretendiam determinar os valores exatos das razões trigonométricas, e desta forma, obtiveram-se os valores aproximados (figura 5.30).

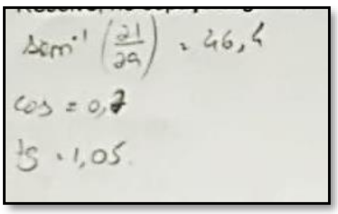


***Figura 5.30**: Resolução da pergunta 2 da ficha 13A pelo aluno R*

Portanto, de uma forma sintética, dos alunos que responderam à questão, a maioria (7) conseguiu compreender que deveria aplicar as relações entre as razões trigonométricas, mobilizando-as (resolução do tipo I), existindo apenas dois alunos que optaram por outras abordagens à pergunta não recorrendo a nenhuma das relações enunciadas (resolução do tipo II), como espelha a tabela 5.9.

Tabela 5.9*: Respostas dos alunos à pergunta 2 – ficha 13A*

Resolução do tipo	**Frequência absoluta (n.º de alunos)**	**Frequência Relativa (em %)**
I	7	39%
II	2	11%
Sem resposta	9	50%
Total (em alunos)	18	100%

Uma vez que houve oportunidade de na questão de aula (Anexo 21), realizada no dia 19 de março de 2019, efetuar uma pergunta onde os alunos teriam de ser capazes de utilizar as relações entre as razões trigonométricas como forma de determinar valores exatos de razões trigonométricas em falta, importa compreender como é que eles responderem a essa questão 4 (figura 5.31).

4. Sabendo que α é um ângulo agudo e que $cos\ \alpha = \frac{2}{3}$, determine o valor exato de:

a) $sen\ \alpha$

b) $tg\ \alpha$

Figura 5.31*: Enunciado da pergunta 4 da questão de aula*

A questão de aula foi realizada por 17 dos 18 alunos da turma, havendo um aluno que não respondeu à pergunta 4.

Na alínea a) desta pergunta os alunos deveriam mobilizar a FFT para determinar o seno do ângulo alfa, conhecendo o cosseno desse mesmo ângulo. Seguindo a linha de análise da pergunta anterior, verificam-se dois tipos de resolução.

A resolução do tipo I que se refere aos alunos que mobilizam adequadamente a FFT, reconhecendo que esta é a relação que permite determinar o valor exato da razão trigonométrica pedida. Numa resolução deste tipo (figura 5.32.) verifica-se que a aluna começa por evocar a FFT e depois substitui o valor do cosseno – que é conhecido –, na fórmula.

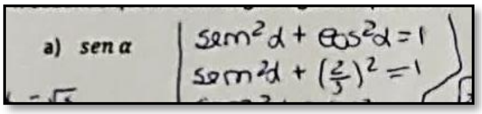


***Figura 5.32**: Parte da resolução da pergunta 4a) da questão de aula pela aluna A*

As resoluções do tipo II dizem respeito aos alunos que não mobilizam a FFT, já que aplicam esta relação de forma incorreta, esquecendo-se de elevar ao quadrado ambas as parcelas do primeiro membro (figura 5.33).

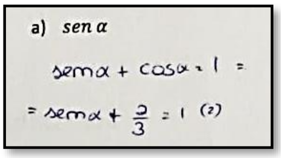


***Figura 5.33**: Parte da resolução da pergunta 4a) da questão de aula pelo aluno R*

Portanto, relativamente à FFT, podemos concluir (tabela 5.10.) que a maioria da turma (82%) consegue mobilizá-la corretamente (resolução do tipo I), reconhecendo a sua utilidade na determinação do valor exato de uma razão trigonométrica, a partir do conhecimento de outra, havendo apenas dois alunos que não o conseguem fazer (resolução do tipo II).

***Tabela 5.10**: Respostas dos alunos à pergunta 4a) – questão de aula*

Resolução do tipo	**Frequência absoluta (n.º de alunos)**	**Frequência Relativa (em %)**
I	14	82%
II	2	12%
Sem resposta	1	6%
Total (em alunos)	17	100%

Em relação à alínea b), os alunos deveriam recorrer à relação entre as três razões trigonométricas $\left(tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}\right)$ de forma a conseguirem responder à questão. Seguindo a linha de análise das perguntas anteriores, as resoluções dos alunos dividem-se em dois tipos.

A resolução do tipo I refere-se aos alunos que mobilizam a relação entre as três razões de forma correta. Na figura 5.34. observa-se uma resolução deste tipo, onde o aluno começa por colocar num canto a forma de relacionar as três razões de um mesmo ângulo, e depois, na sua resposta, aplica diretamente a fórmula.

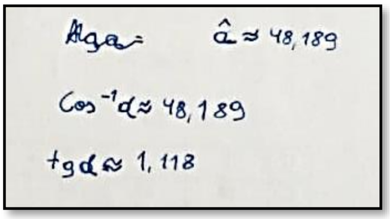


Figura 5.34: *Parte da resolução da pergunta 4b) da questão de aula pelo aluno H*

Por outro lado, nas resoluções do tipo II, os alunos não mobilizam esta relação entre as três razões trigonométricas. Um dos alunos recorre à determinação do valor aproximado do ângulo alfa, e, posteriormente, faz a substituição desse valor na tangente desse ângulo (figura 5.35). Mais uma vez, o cálculo não está errado, no entanto, o aluno não responde de forma cabal à pergunta, já que se pretendida um valor exato.

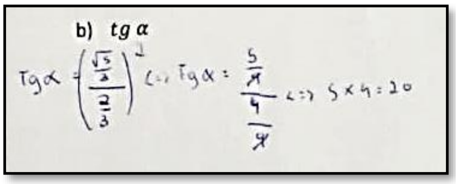


Figura 5.35*: Resolução da pergunta 4b) da questão de aula pelo aluno P*

O outro aluno que apresenta este tipo de resolução (II) consegue compreender que a tangente do ângulo é dada pelo quociente entre o seno e o cosseno, no entanto, como podemos atestar pela figura 5.36., coloca o expoente dois nesse quociente.

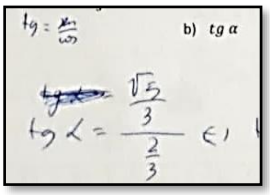


Figura 5.36: *Parte da resolução da pergunta 4b) da questão de aula pelo aluno M*

Logo, sintetizando a análise, no que diz respeito à relação entre as três razões trigonométricas (tabela 5.11.), verifica-se que a maioria dos alunos (14) entendem que devem fazer a mobilização desta relação de forma a obter o valor exato da razão trigonométrica em falta (resolução do tipo I), existindo dois alunos que não mobilizam esta relação (resolução do tipo II), um por optar primeiramente, pela determinação do ângulo, obtendo um valor aproximado, e o outro por não escrever corretamente a relação.

Tabela 5.11*: Respostas dos alunos à pergunta 4b) – questão de aula.*

Resolução do tipo	Frequência absoluta (n.º de alunos)	Frequência Relativa (em %)
I	14	82%
II	2	12%
Sem resposta	1	6%
Total (em alunos)	17	100%

Demonstração de relações

Importa ainda verificar se os alunos conseguem reconhecer estas relações entre as razões trigonométricas no âmbito das demonstrações. Para isso, a pergunta 16 (figura 5.37.) do teste escrito (Anexo 22), que foi realizado no dia 25 de março de 2019, serve este propósito. Note-se que o que se pretende é perceber se os alunos, quando confrontados com este tipo de tarefa, entendem que devem recorrer às relações entre as razões trigonométricas, como meio de argumentação das mesmas, não interessando, neste ponto, se a demonstração está realizada corretamente.

16. Prova que a relação seguinte é válida para qualquer ângulo agudo de amplitude α:

$$sen\ \alpha \times cos\alpha \times tg\alpha + cos^2\ \alpha = 1$$

Figura 5.37*: Enunciado da pergunta 16 do teste escrito*

Nesta pergunta, dois alunos não responderam e outros seis não realizaram uma demonstração, portanto, o universo em análise são 10 alunos.

Num primeiro momento, os alunos deveriam reconhecer a relação entre as três razões trigonométricas, de forma a poderem escrever $tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$, caracterizando-se como resoluções do tipo I. Todos os alunos, que efetuaram a demonstração, conseguiram compreender que esta relação entre as razões deveria ser utilizada (figura 5.38.), não havendo nenhuma resolução do tipo II, ou seja, resoluções onde os alunos não reconheceram a razão trigonométrica.

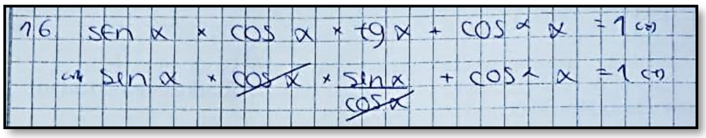


***Figura 5.38**: Parte da resolução da pergunta 16 do teste escrito pela aluna D*

Assim, a tabela 5.12., sistematiza-se o que foi analisado: dos 10 alunos que realizaram a demonstração, todos conseguiram reconhecer a relação entre as três razões trigonométricas.

***Tabela 5.12**: Respostas dos alunos à pergunta 16 relativamente à relação entre as três razões trigonométricas– teste escrito*

Resoluções do tipo	**Frequência absoluta (n.º de alunos)**	**Frequência Relativa (em %)**
I	10	56%
II	0	0%
Resolução não adequada	6	33%
Sem resposta	2	11%
Total (em alunos)	18	100%

Num segundo momento os alunos deveriam reconhecer a FFT, o que lhes permitiria justificar a igualdade a que chegaram, enquadrando-se nas resoluções do tipo I. Dos 10 alunos, seis evocaram esta relação, (tendo os restantes apresentado resoluções do tipo II sem mobilização desta relação) como se pode observar pela figura 5.39. e 5.40., onde são visíveis estas duas formas diferentes de o fazer. Na figura 5.39. verifica-se que o aluno opta por desenvolver o primeiro membro até chegar ao 2.º membro, de forma a concluir a demonstração.

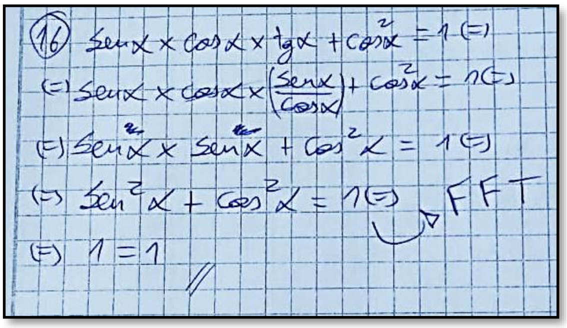


***Figura 5.39**: Resolução da pergunta 16 do teste escrito pelo aluno B*

Já na figura 5.40., o aluno desenvolve ambos os membros ao mesmo tempo, justificando, no final, através de uma seta a apontar para "FFT" e para o sítio onde pretende indicar que valida a passagem.

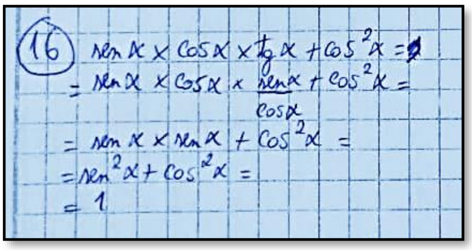


***Figura 5.40**: Resolução da pergunta 16 do teste escrito pelo aluno E*

Portanto, a tabela 5.13. indica que 33% dos alunos conseguiram reconhecer a FFT mobilizando-a como justificação para a conclusão da demonstração.

***Tabela 5.13**: Respostas dos alunos à pergunta 16 relativamente à FFT– teste escrito*

Resoluções do tipo	**Frequência absoluta (n.º de alunos)**	**Frequência Relativa (em %)**
I	6	33%
II	4	23%
Resolução não adequada	6	33%
Sem resposta	2	11%
Total (em alunos)	18	100%

5.1.1.5. Relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares

Compreender se os alunos conseguem verificar a relação entre o seno e cosseno de ângulos complementares também é tópico da Unidade sobre o qual não existem muitos dados, visto que foi um ponto que foi menos trabalhado com os alunos. Mesmo assim, optei por analisar este tópico na medida em que a ficha 15 (Anexo 20), proposta no dia 19 de março de 2019, apresenta a pergunta 3b) que permite extrair alguma informação (figura 5.41.). Esta pergunta apresenta uma estrutra mais direta que, de alguma forma, levaria os alunos a usarem a relação entre ângulos complementares. É importante mencionar que esta ficha foi realizada com o objetivo de os alunos trabalharem autonomamente e, portanto, cada um a foi resolvendo ao seu ritmo de trabalho, não havendo muitas resoluções disponíveis para análise.

3. Sobre a figura ao lado (que não está desenhada à escala), sabe-se que:
- $[ABC]$ é um triângulo retângulo em B;
- B é o ponto médio do segmento de reta $[AE]$;
- $\overline{AD} = 9\ cm$, $\overline{DE} = 12\ cm$ e $\overline{AE} = 15\ cm$.

b) Justifica que $\cos \hat{A} = sen\ \hat{E}$.

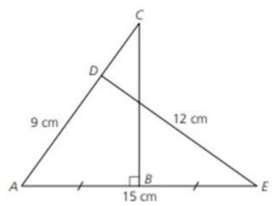


***Figura 5.41**: Enunciado da pergunta 3b) da ficha 15*

Foram recolhidas sete resoluções. Com estas resoluções, percebe-se que os alunos optam por dois caminhos diferentes para a sua resposta.

Há alunos que utilizam o triângulo e escrevem a definição de sen Ê e a de cos Â, verificando que são iguais. Este tipo de resolução é visível na figura 5.42., onde o aluno considera que a apresentação da definição de cada uma das razões trigonométricas pedida é suficiente para a pergunta formulada. Note-se, no entanto, o cuidado que o aluno teve em dar uma resposta mencionando que a soma das suas amplitudes é 90°, sugerindo que compreendeu a definição de ângulos complementares.

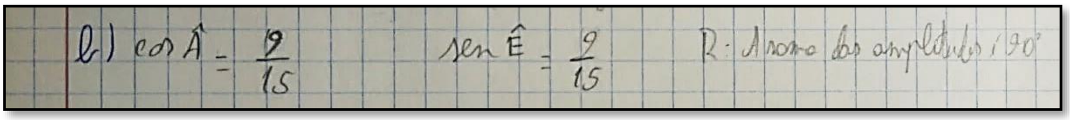


***Figura 5.42**: Resolução da pergunta 3b) da ficha 15 pelo aluno B*

Já outros alunos escolherem dar a sua resposta em texto corrido, fazendo a sua argumentação por palavras, como se pode observar pela figura 5.43., onde a aluna justifica o facto de os ângulos serem complementares por este ser um triângulo retângulo, e como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°, os ângulos Â e Ê somam 90°, isto é, são complementares.

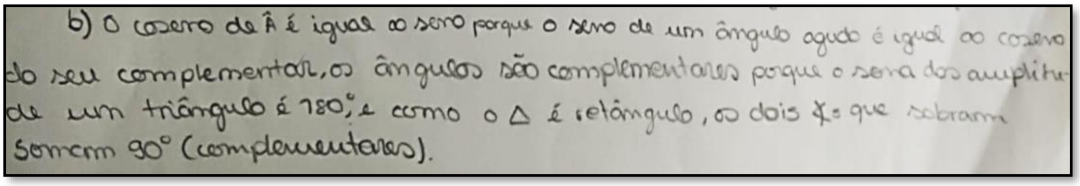

b) O coseno de Â é igual ao seno porque o seno de um ângulo agudo é igual ao coseno do seu complementar, os ângulos são complementares porque a soma das amplitude de um triângulo é 180°, e como o Δ é retângulo, os dois ∢s que sobram somam 90° (complementares).

__Figura 5.43__: Resolução da pergunta 3b) da ficha 15 pela aluna L

Considerando que a totalidade (100%) corresponde aos 7 alunos com as resoluções disponíveis, percebe-se que todos compreenderam que a igualdade em causa é verdadeira dado que os ângulos considerados são complementares (tabela 5.14.). Dois alunos optaram por se utilizar do triângulo e justificar pelas definições trigonométricas, enquanto os restantes (5) escolheram apresentar a sua resposta em texto.

__Tabela 5.14__:Respostas dos alunos à pergunta 3b) – ficha 15

Alunos que	**Frequência absoluta (n.º de alunos)**	**Frequência Relativa (em %)**
Justificam pelas definições das razões trigonométricas	2	29%
Justificam por palavras	5	71%
Total (em alunos)	7	100%

5.1.1.6. Valores exatos dos ângulos de $30°$, $45°$ e $60°$

A pergunta 15 do teste escrito (Anexo 22), realizado no dia 25 de março de 2019, permite perceber em que medida é que os alunos conseguem reconhecer os valores exatos dos ângulos de referência (30°, 45° e 60°). O enunciado desta questão apresenta-se de seguida, na figura 5.44.

15. O helicóptero representado na figura ao lado por H é observado de dois pontos A e B, do solo. Os ângulos de elevação do helicóptero relativamente a A e B são, como se mostra na figura, de $45°$ e $60°$, respetivamente. A distância de A a B é $180\ metros$ e A, B e C pertencem à mesma reta.

Determina a altura, h, arredondada às unidades, a que se encontra o helicóptero do solo. Nos cálculos intermédios usa valores exatos.

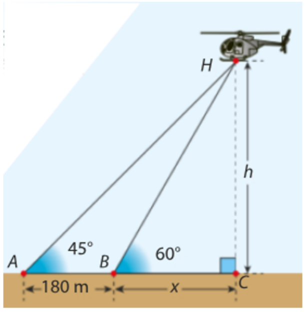


***Figura 5.44**: Enunciado da pergunta 15 do teste escrito*

Dos 18 alunos que integram a turma e que realizaram o teste, três não responderam à questão; um apresenta uma resposta que não se relaciona com pergunta feita e duas alunas escrevem os valores aproximados das razões que obtiveram, apesar de no enunciado mencionar que para nos cálculos intermédios deveriam ser utilizados valores exatos. Sobram, portanto, para esta análise, 12 alunos. Há uma aluna, deste conjunto de 12, que apesar de não equacionar o problema, e parecer não perceber qual é a razão trigonométrica que deve utilizar, nem o ângulo referente à mesma, que apresenta uma tabela com todos os ângulos de referência dispostos nas colunas, e nas linhas surgem as razões trigonométricas, sendo cada entrada da tabela o valor exato respeitante à razão trigonométrica com o ângulo que se escolhe (figura 5.45.). Os valores apresentados estão todos corretos, o que significa que a aluna consegue reconhecer os valores exatos das razões trigonométricas de ângulos de referência.

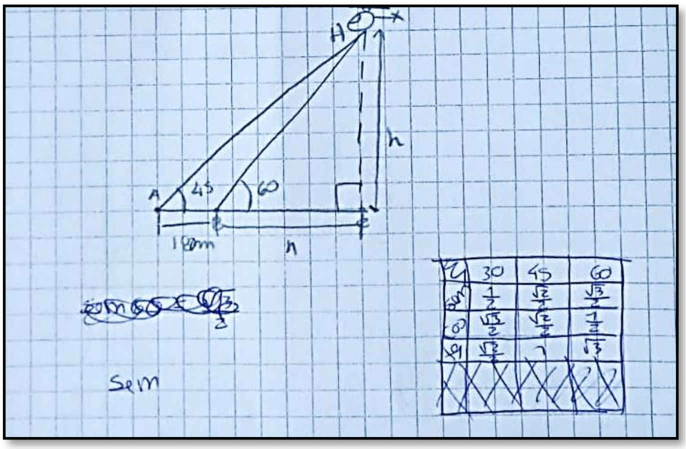


***Figura 5.45**: Resolução da pergunta 15 do teste escrito pela aluna A*

Nesta pergunta os alunos deveriam reconhecer os valores exatos da $tg\ 45°$ e da $tg\ 60°$. Pela observação das resoluções, é possível dividir em dois tipos: os que reconhecem o valor exato da razão trigonométrica em causa, e os que não o reconhecem.

A figura 5.46., ilustra uma resolução onde a aluna consegue reconhecer ambos os valores exatos pretendidos, uma vez que substitui cada tangente pelo valor correspondente.

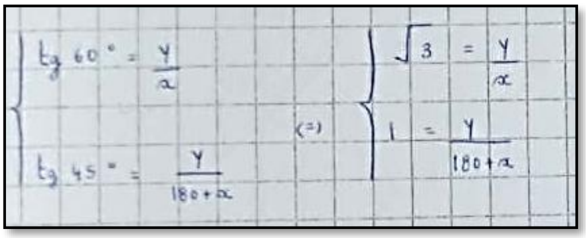


Figura 5.46*: Parte da resolução da pergunta 15 do teste escrito pela aluna O*

Há um aluno que reconhece o valor exato de $tg\ 45°$, mas não reconhece o da $tg\ 60°$ (figura 5.47.), o que não deixa de ser curioso, levando a questionar se, como os alunos podiam utilizar a máquina, se este reconhecimento advém desse uso, ou não. Esta questão levanta-se porque se pode observar que o aluno escreve que $tg\ 45° \times 180 + x = 180 + x$, certificando que $tg\ 45° = 1$. No entanto, o aluno "arrasta" tanto quanto possível $tg\ 60°$, que de uma passagem para outra se some, dando lugar a 104, que é o valor arredondado às unidades do quociente da passagem imediatamente anterior.

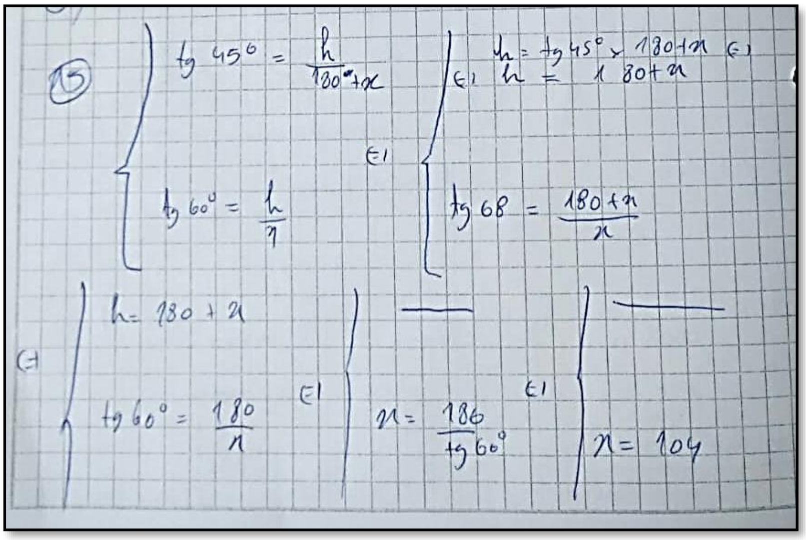


Figura 5.47*: Parte da resolução da pergunta 15 do teste escrito pelo aluno H*

Há ainda dois casos a considerar, que dizem respeito a dois alunos que só apresentam uma equação do sistema que deveria ser formulado, porém, em ambos os casos (figuras 5.48. e 5.49), não conseguem fazer o reconhecimento do valor exato para a razão trigonométrica que escreveram, uma vez que não desenvolvem a equação que registaram.

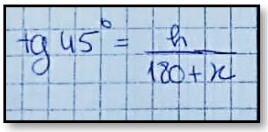


***Figura 5.48**: Resolução da pergunta 15 do teste escrito pela aluna F*

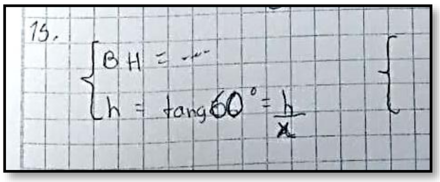


***Figura 5.49**: Resolução da pergunta 15 do teste escrito pelo aluno S*

De uma forma geral, metade da turma consegue reconhecer os valores exatos das razões trigonométricas, um aluno não consegue reconhecer $tg\ 45°$ e dois alunos não reconhecem $tg\ 60°$ (tabela 5.15.). É ainda de notar que há dois alunos que utilizam valores aproximados para as razões trigonométricas, quando aquilo que se pede são os valores exatos.

***Tabela 5.15**: Respostas dos alunos à pergunta 15 – teste escrito*

Alunos que	**Frequência absoluta (n.º de alunos)**	**Frequência Relativa (em %)**
Reconhecem ambos os valores exatos das razões trigonométricas pedidas	9	50%
Não reconhecem $\boldsymbol{tg\ 45°}$	1	6%
Não reconhecem $\boldsymbol{tg\ 60°}$	2	11%
Utilizam valores aproximados	2	11%
Sem resposta/ Resposta inadequada	4	22%
Total (em alunos)	18	100%

5.1.2. Simbologia e notação matemáticas

Durante a unidade didática foi possível observar diversas dificuldades relacionados com a simbologia e notação matemáticas, que se refletem, também, nas resoluções recolhidas para este estudo. Assim, a maioria dos erros cometidos dizem respeito à simbologia e notação matemáticas, no geral, existindo, apenas um deles relativo aos tópicos de Trigonometria, como irei apresentar de seguida.

Simbologia e notações geométricas

A notação de segmento de reta, não é clara para muitos alunos, como pude observar no decorrer da intervenção. Na maioria das vezes que os alunos pretendem referir-se ao comprimento do segmento de reta, escrevem reta, como se pode observar na figura 5.4. Outros há que se referem só ao segmento de reta ao invés do comprimento desse mesmo segmento (figura 5.50.), confundindo a notação de segmento de reta e comprimento do segmento de reta.

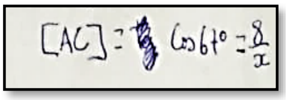


***Figura 5.50**: Confusão entre a notação de segmento de reta e comprimento de segmento de reta pelo aluno J*

Foi igualmente muito frequente que os alunos não apresentassem o símbolo de grau, quando se referiam ao mesmo, como se pode ver pela figura 5.73. Nesta resolução consegue-se detetar ainda um erro também muito comum nesta unidade: a confusão entre as letras gregas e o alfabeto português. Focando neste exemplo, este aluno utiliza a letra a quando deveria usar α (alfa).

O erro relacionado com o tópico da Trigonometria refere-se à notação utilizada para determinar o valor da amplitude de um ângulo a partir do conhecimento de uma razão trigonométrica. Este erro estendeu-se por toda a intervenção, indo amenizando-se à medida que esta ia decorrendo. A figura 5.51. exemplifica bem este erro, onde a aluna na tentativa de isolar o ângulo, colocando a função inversa da razão trigonométrica em questão no outro membro da equação, confunde a notação, deixando ficar no mesmo membro o ângulo e a função inversa. O mais interessante de observar é que para que o cálculo saia corretamente, os alunos têm de utilizar o processo que fazem na máquina calculadora, isto é, para determinar o ângulo alfa, e pegando neste exemplo, esta aluna teve de ir à máquina inserir $sen^{-1}\left(\frac{16}{22}\right)$ para lhe devolver o que pretendia. Contudo, apesar deste processo ter sido efetuado corretamente, dado que o valor está certo, a aluna não é capaz de o traduzir, servindo-se da linguagem matemática.

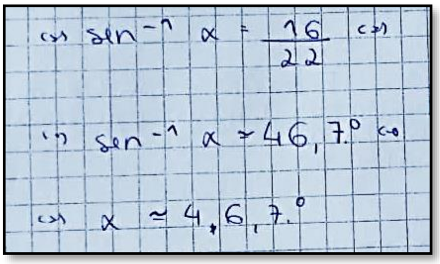


***Figura 5.51**: Problemas com a simbologia e notação para a determinação de ângulos pela aluna D*

Simbologia e notações algébricas

A atribuição de diferentes designações a uma mesma incógnita foi também muito recorrente ao longo da Unidade, sugerindo que existe uma confusão relacionada com o significado das letras. Dentro deste contexto, identificam-se outros problemas, como por exemplo, o aparecimento de uma incógnita nos cálculos, sem que esta esteja devidamente identificada. Na figura 5.52., conseguimos observar que a aluna, sucessivamente, evoca a variável h, c e x, sem que explicite o que estas representam. É ainda possível observar que, quando é feita a justificação para a rejeição da solução negativa, a aluna recorre a outra letra, que não se percebe de onde surge, a, que aparece em todas as alíneas, podendo-se conjeturar que esta repetição esteja ligada ao momento de aprendizagem da justificação, ou seja, quando a aluna aprendeu a justificação, a letra a foi a utilizada, e, então, como é um processo automatizado, não se apercebe que atribui letras diferentes às novas incógnitas.

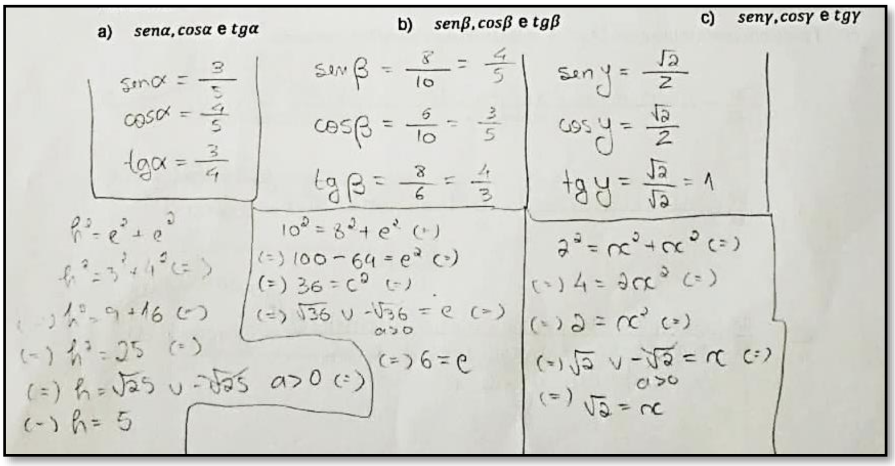


***Figura 5.52**: Problemas relacionados com as variáveis pela aluna N*

Neste contexto de erros algébricos, outro erro muito frequente é a constante confusão de aplicação do sinal de igual e do sinal de aproximadamente, o que pode ser motivado por distração, ou então pelo facto de existir uma efetiva dificuldade em compreender a diferença entre um valor aproximado e um valor exato. Por exemplo, na figura 5.47., o aluno faz todos os cálculos de que necessita, e ao colocar o valor na máquina, esta devolve-lhe, com uma aproximação às décimas, $103,9$, opta por colocar o sinal de igual, quando o que deveria ter usado era o de aproximadamente, dado que obteve um valor arredondado, no caso da resolução dele, às unidades. Este erro também se pode observar na figura 5.59., onde, o aluno utiliza sempre o sinal de igual, apesar dos valores apresentados serem aproximados às unidades.

Ainda relacionado com o sinal de igual, existem alunos que demonstraram dificuldades na utilização oportuna do sinal de equivalente, acabando por utilizar o sinal de igual, como é observável na figura 5.33., onde o aluno na mesma linha da equação utiliza dois sinais de igual, demonstrando a dificuldade em compreender o significado dos símbolos matemáticos consoante o contexto onde estão inseridos e a noção de equivalência.

Um último erro, dentro da simbologia e notação matemáticas, tem que ver com as demonstrações. Este é um tipo de tarefa muito diferente das outras com que estão mais familiarizados e, portanto, os alunos deverão compreender que a sua forma de resolver e responder não é igual às restantes, no sentido em que quando a demonstração está concluída o aluno deverá ter essa perceção, que deverá transparecer na sua resolução. Quando os alunos apresentam respostas a demonstrações, dão entender que compreendem que terminou, e, que, consequentemente, eles efetuaram essa demonstração, no entanto, com a apresentação de respostas evidenciam não compreender a singularidade deste tipo de tarefa. Este foi um erro muito frequente nesta unidade, porém, um aspeto positivo é que no momento do teste escrito de avaliação sumativa, nenhum aluno o cometeu, o que evidencia uma evolução.

5.1.3. Cálculos numérico e algébrico

Observando a figura 5.52., nota-se que a aluna em todas as alíneas escreve que o valor da incógnita é $h = \sqrt{25} \lor -\sqrt{25}$, não colocando o $h =$ para a segunda solução obtida. Este erro perpetua-se nas seguintes alíneas e é, também, frequente noutros alunos. Relacionado com a obtenção de duas soluções por meio de uma equação de segundo grau, é recorrente que os alunos apresentem somente a solução positiva quando extraem a raiz quadrada, como se verifica pela figura 5.53., onde a aluna não apresenta o sinal de mais ou menos ($\pm$).

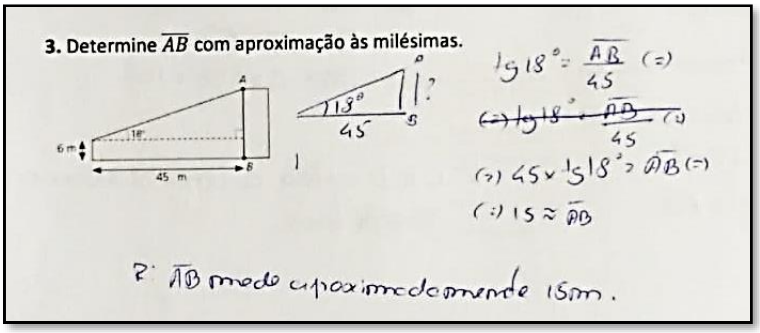


Figura 5.53*: Sem a apresentação da solução negativa proveniente da resolução de uma equação do segundo grau pela aluna A*

O erro mais usual e aquele que acompanhou os alunos durante toda a intervenção foi o dos arredondamentos. A grande maioria dos alunos confunde os diferentes números de cassas decimais (décimas ou 2 c.d., centésimas ou 2 c.d. e milésimas ou 3 c.d.) entre si. A figura 5.54. é um bom exemplo deste erro. Nesta pergunta pedia-se que o resultado fosse apresentado com uma aproximação às milésimas, contudo este aluno faz um arredondamento às unidades. Este erro pode ter sido motivado pelo facto de o aluno não conseguir compreender o número de casas decimais ideal a preservar em cálculos intermédios, o que muitas vezes comprometeu a resolução correta de algumas tarefas por parte de alguns alunos, como é visível na resolução exposta na figura 5.59; seja por não conseguir efetuar os arredondamentos correta e adequadamente.

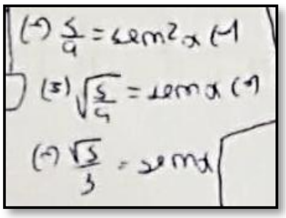


Figura 5.54*: Problemas com arredondamentos pelo aluno R*

Sistematizam-se as secções 5.1.2. e 5.1.3. no quadro (5.1.), onde se reúnem as dificuldades e erros mais observados ao longo de toda a Unidade Didática.

Quadro 5.1: *Síntese da secção 5.1.2. e 5.1.3. – Dificuldades e erros mais observados ao longo da intervenção*

<table>
<tr><th colspan="2">Dificuldades e erros</th></tr>
<tr><th>Na simbologia e notação matemáticas</th><th>Nos cálculos algébrico e numérico</th></tr>
<tr><td>Notação de segmento de reta</td><td rowspan="2">Ausência de incógnita na segunda solução numa obtida na equação de segundo grau</td></tr>
<tr><td>Distinção entre o sinal de igual e sinal de aproximadamente</td></tr>
<tr><td>Distinção entre o sinal de igual e o sinal de equivalente</td><td rowspan="2">Ausência da solução negativa na resolução de uma equação de segundo grau</td></tr>
<tr><td>Identificação de letras do alfabeto grego e o português</td></tr>
<tr><td>Atribuição de diferentes letras à mesma variável</td><td rowspan="2">Distinção entre os diferentes números de casas decimais</td></tr>
<tr><td>Variáveis sem identificação na tarefa proposta</td></tr>
<tr><td>Ausência do uso da notação de grau</td><td rowspan="2">Compreensão do número de casas decimais a preservar em cálculos intermédios</td></tr>
<tr><td>Notação na determinação do ângulo a partir do valor da razão trigonométrica</td></tr>
</table>

5.1.4. As tarefas e os tópicos de Trigonometria

Cabe neste ponto realizar algumas inferências acerca da secção 5.1., percorrei, assim, cada tarefa apresentada relacionando a sua tipologia com os resultados obtidos, havendo, no entanto, uma predominância nas tarefas de exploração e nos exercícios.

Para a aprendizagem do tópico onde se pretende que os alunos reconheçam as definições das razões trigonométricas analisaram-se exercícios (ficha 11: Anexo 2) e um problema de aplicação (teste escrito: Anexo 22). Conforme as tabelas 5.1. e 5.2., apresentadas na secção anterior, é possível observar que a percentagem de alunos que mobilizou corretamente as razões trigonométricas nos exercícios é maior do que daqueles que o fizeram no problema proposto no teste escrito, sendo que em ambos os casos a grande maioria da turma foi capaz de o fazer corretamente. Repare-se, no entanto, que a análise referente ao problema conta com todos os alunos da turma, o que não acontece com a análise dos exercícios, podendo justificar-se essa diferença de percentagem com a totalidade de resoluções disponíveis para análise. Esta diferença também pode ser justificada pelo tipo de tarefa, já que a primeira apresenta uma pergunta muito mais direta do que a segunda.

No que diz respeito à invariância nas razões trigonométricas de um ângulo agudo, foi proposta uma tarefa de exploração (ficha 12: Anexo 3). Pouco mais de metade dos grupos (tabela 5.4.) de alunos constituídos para a realização da tarefa conseguiram concluir o que se pretendia. Podem ter contribuído para este resultado dois fatores: o primeiro tem que ver com a utilização da tecnologia, e o segundo com a estrutura da tarefa. Dado que foi a primeira e única tarefa onde os alunos utilizaram a tecnologia numa ótica do utilizador, é natural que a sua exploração não fosse completa, o que pode ter levado a não concluírem o resultado esperado. Já em relação à estrutura da tarefa, como através da pergunta 2 os alunos verificavam uma dependência das razões trigonométricas relativamente aos comprimentos dos lados do triângulo, quando realizava a pergunta 3, poderiam considerar que esta dependência se mantinha dado que se continuava a alterar a posição de um ponto, mostrando que talvez esta não tenha sido adequadamente concebida.

Foram analisados dois exercícios para compreender a aprendizagem do tópico do reconhecimento do intervalo de variação das razões trigonométricas de um ângulo agudo. É mais difícil, devido aos poucos dados disponíveis, tecer considerações acerca da aprendizagem deste tópico, no entanto, é de notar que nenhum aluno, em relação à pergunta de escolha múltipla (teste escrito: Anexo 22) escolhe o valor para a qual a razão trigonométrica possa ser negativa, o que evidencia que conhecem, pelo menos, o limite inferior do intervalo de variação das razões trigonométricas. Apesar disto, há muitos alunos (tabela 5.5.) que admitem que o cosseno pode tomar valores iguais a um, o que evidencia que os alunos interiorizaram os extremos do intervalo, não sabendo se se trata de um intervalo aberto ou fechado. Talvez este tópico devesse ter sido melhor trabalhado, por exemplo, aquando a introdução do mesmo, explicitar claramente qual o intervalo em causa.

Em relação às relações entre as razões trigonométricas houve três aspetos em análise e, portanto, foram propostos três diferentes tipos de tarefas. O primeiro diz respeito à introdução destas relações através de uma tarefa de exploração (ficha 13: Anexo 11). Nesta tarefa, a maioria dos pares (tabelas 5.7. e 5.8.) conclui ambas as relações entre as razões trigonométricas. É importante mencionar que os pares de alunos que não conseguiram concluir as relações entre as razões trigonométricas não o fizeram por erros nos cálculos, e não por não terem compreendido a tarefa em si, o que evidencia que esta estava adequada. O segundo aspeto relaciona-se com a mobilização destas relações para a determinação dos valores exatos das razões trigonométricas, tendo sido proposto um exercício (ficha 13A: Anexo 18). A maioria dos alunos que responde à questão (tabela 5.9.) consegue reconhecer que deve utilizar estas relações e fá-lo corretamente. Contudo, é relevante sublinhar que 2 alunos apresentaram uma resolução que mostra que a formulação da questão não foi muito bem conseguida, dando origem a confusões desnecessárias. Já na questão de aula (Anexo 21), com uma pergunta mais objetiva, sendo na mesma um exercício, um maior número de alunos (tabelas 5.10 e 5.11.) consegue reconhecer as relações entre as razões trigonométricas. O terceiro e último aspeto analisado tem que ver com a mobilização destas relações para a realização de demonstrações. No teste escrito (Anexo 22), verifico que todos os alunos que realizaram a questão (tabela 5.12.) conseguem reconhecer a relação entre as três razões, porém, quando se refere à Fórmula Fundamental da Trigonometria, este número diminui (tabela 5.13.). Esta diferença entre a percentagem de alunos que consegue reconhecer estas relações na questão de aula (Anexo 21) e no teste escrito (Anexo 22) poderá estar relacionada com o tipo de tarefa proposta, uma vez que, enquanto na questão de aula (Anexo 21) estamos perante um exercício e, portanto, uma pergunta mais direta, no teste escrito (Anexo 22) trata-se de uma demonstração, exigindo um outro tipo de técnicas previamente realizadas, para que possa ser feito este reconhecimento das relações, já que este só ocorre após o desenvolvimento algébrico e/ou numérico.

A verificação da relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares, por parte dos alunos, também é difícil de atestar dada a reduzida quantidade de dados disponíveis, ainda assim, na realização de um exercício (3b) da ficha 15: Anexo 20), todos os alunos em análise (tabela 5.14.) conseguem justificar a complementaridade dos ângulos. É necessário sublinhar que a pergunta é bastante direta, o que impele à utilização deste resultado.

O último tópico refere-se ao reconhecimento dos valores exatos de 30°, 45° e 60° (ângulos notáveis). Num problema do teste escrito (Anexo 22) pedia-se que os alunos utilizassem valores exatos para os valores das duas razões trigonométricas obtidas, tendo sido feito este reconhecimento por metade dos alunos da turma, existindo uma pequena parte que só conseguiu reconhecer um dos valores exatos, sendo que há alunos que, mesmo sendo explicitamente pedidos os valores exatos, calculam os valores aproximados (tabela 5.15.).

Dados os erros e as dificuldades observadas (que se encontram expostas nas secções 5.1.2. e 5.1.3.), o mais relevante para o estudo é o relacionado com o tópico da Trigonometria: cálculo do valor da amplitude do ângulo a partir do valor da razão trigonométrica. A confusão com a notação e a forma como traduzir para linguagem matemática aquilo que intuitivamente foi compreendido, evidencia que este tópico deveria ter sido mais e melhor trabalhado no decorrer da intervenção.

Verifica-se, portanto, que em quase todas as tarefas, mais de metade da turma consegue corresponder ao objetivo estabelecido, sendo que essa percentagem aumenta à medida que aumentam os diferentes tipos de tarefas trabalhados, como se pode atestar, por exemplo, pelo tópico das relações entre as razões trigonométricas. Já os tópicos onde menos de metade da turma é bem-sucedida, dizem respeito aos tópicos onde a diversificação de tarefas foi menos recorrente, como por exemplo no tópico do intervalo de variação das razões trigonométricas.

5.2. Competências evidenciadas pelos alunos

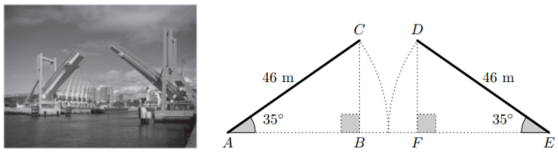
Nesta secção do presente capítulo interessa perceber como os alunos mobilizam os diferentes tópicos trigonométricos, tratados na secção imediatamente anterior, para darem resposta a outro tipo de tarefas, ou seja, como é que os alunos aplicam e operacionalizam os conhecimentos adquiridos na resolução de problemas e de demonstrações.

5.2.1. Resolução de problemas

Importa, nesta subsecção, compreender em que medida é que os alunos da turma são bem-sucedidos, na resolução de problemas, isto é, se conseguem chegar à resposta correta e se implementam uma estratégia para o fazer.

A questão de aula (Anexo 21), realizada no dia 19 de março de 2019, foi resolvida por 17 alunos e comtemplava um problema (figura 5.55).

5. No Porto de Leixões, existe uma das maiores pontes basculantes do mundo. No esquema da figura seguinte à direita), está representada a posição, em relação à horizontal, que as duas secções móveis da ponte tinham num certo instante. Nesse esquema, as secções móveis estão representadas pelos segmentos de reta $[AC]$ e $[ED]$.



Ponte do Porto de Leixões

Relativamente ao esquema, sabe-se que:

- Os triângulos $[ABC]$ e $[EDF]$ são retângulos nos vértices B e F, respetivamnete;
- $\overline{AC} = \overline{ED} = 46\ m$;
- $B\hat{A}C = D\hat{E}F = 35°$;
- $\overline{AE} = \overline{AC} + \overline{ED}$

Determina a distância entre os pontos C e D, na posição representada no esquema da figura da direita.

Apresenta o resultado em metros, arredondado às unidades. Se procederes a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserva, pelo menos, duas casas decimais. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Sugestão: Começa por determinar $\overline{AB}$ ou $\overline{EF}$.

Prova Final 3.º Ciclo – 2018, Época especial

***Figura 5.55**: Enunciado da pergunta 5 da questão de aula*

Deve-se, para a análise desta questão, distinguir a resolução deste problema em dois pontos distintos: obter a resposta correta e implementar uma estratégia para o fazer.

Obter a resposta correta

Observando as resoluções, no que diz respeito a este aspeto, consegue-se dividir a turma em dois diferentes conjuntos: um em que os alunos conseguem obter a resposta do problema e outro onde isso não acontece.

Veja-se, primeiramente o conjunto de alunos (oito) que não consegue chegar ao resultado correto. Dois destes oito alunos não apresentam uma resposta, apesar de um deles ter sublinhado aquilo que considerava mais importante para conseguir resolver o problema (esta questão de sublinhar é interessante uma vez que corresponde às indicações que a professora foi fazendo no decurso das aulas), como é mostrado na figura 5.56.

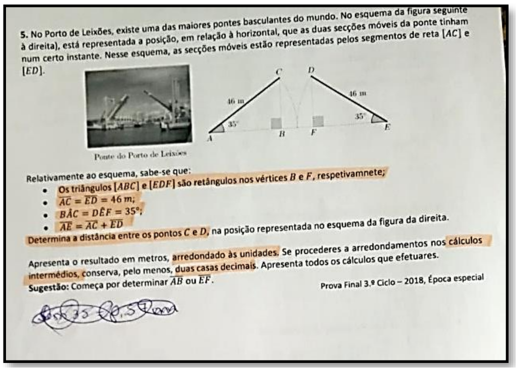


***Figura 5.56**: Resolução pergunta 5 da questão de aula pela aluna A*

Dois elementos deste conjunto não conseguem chegar ao resultado final correto. Estes alunos aplicam somente a razão trigonométrica, não tendo resolvido mais nada a partir de então, sendo que um destes alunos escolhe a razão trigonométrica errada (tangente).

Uma outra aluna não obteve o resultado final correto por ter cometido um erro de cálculo que creio que foi motivado por distração (já que os alunos puderam usar a calculadora, e fazendo $37{,}68 + 37{,}68 = 75{,}36$), o que resultou na troca de um algarismo (figura 5.57).

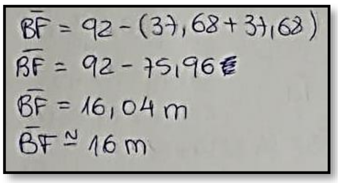


***Figura 5.57**: Parte da resolução da pergunta 5 da questão de aula pela aluna N*

Verifica-se, que a grande maioria dos alunos segue a sugestão do problema e preserva nos cálculos intermédios o número de casas decimais pedidos. Contudo, há um aluno (figura 5.58.) que por não utilizar o número mínimo de casas decimais que garantia a resposta correta, obteve um resultado final errado.

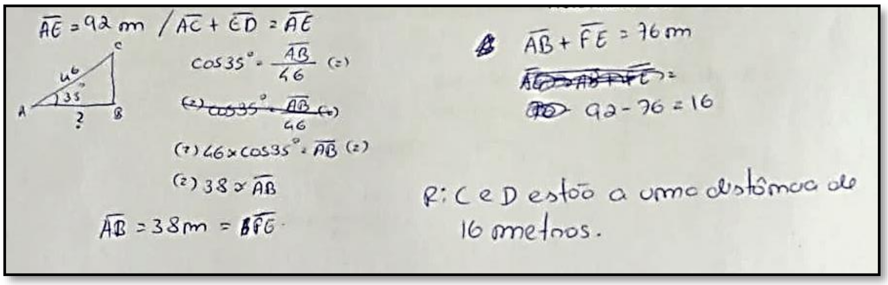


***Figura 5.58:** Resolução da pergunta 5 da questão de aula pelo aluno R*

O sétimo aluno que não consegue chegar ao resultado final correto foi um aluno que não arredondou o número que obteve com a aproximação pedida, tendo deixado ficar três casas decimais na resposta.

O último aluno que não consegue chegar à resposta correta apresenta vários aspetos que contribuíram para isso, como são exemplo as dificuldades com os arredondamentos e a notação matemática, ou ainda a utilização das razões trigonométricas. Interessa focar os problemas relacionados com as razões trigonométricas. Pode observar-se (figura 5.59.) que o aluno vai mobilizar duas razões trigonométricas diferentes, demonstrando que não conseguiu perceber qual seria a mais adequada. O cálculo com o seno, apesar de incluir apenas a parte inteira do número, está correto; já o referente ao cosseno, está errado. Esta resolução evidencia, também, que o conceito de ângulos complementares não ficou consolidado, porque, caso contrário, o aluno rejeitaria um dos cálculos, já que o seno e o cosseno de um mesmo ângulo agudo não têm o mesmo valor.

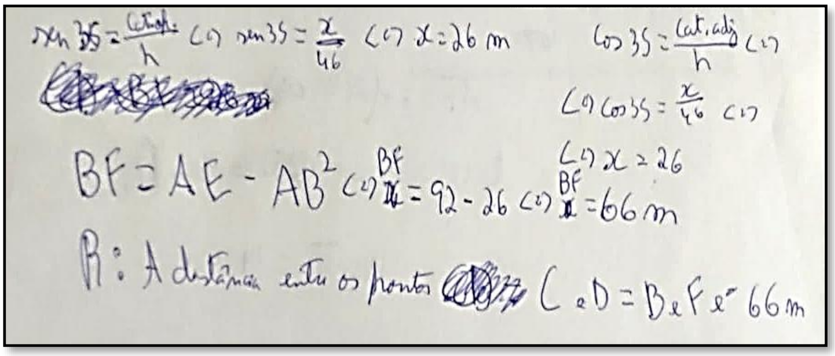


***Figura 5.59**: Resolução da pergunta 5 da questão de aula pelo aluno J*

A tabela seguinte (5.16.) apresenta, de forma sintética, o número de alunos que conseguiu obter a resposta correta, mostrando que 53% da turma (9 alunos) fê-lo.

***Tabela 5.16:** Alunos que obtêm a resposta correta na pergunta 5 – questão de aula*

Alunos que	Frequência Absoluta (n.º de alunos)	Frequência relativa (em %)
Obtêm a resposta correta	9	53%
Não obtêm à resposta correta	6	35%
Sem resposta	2	12%
Total	17	100%

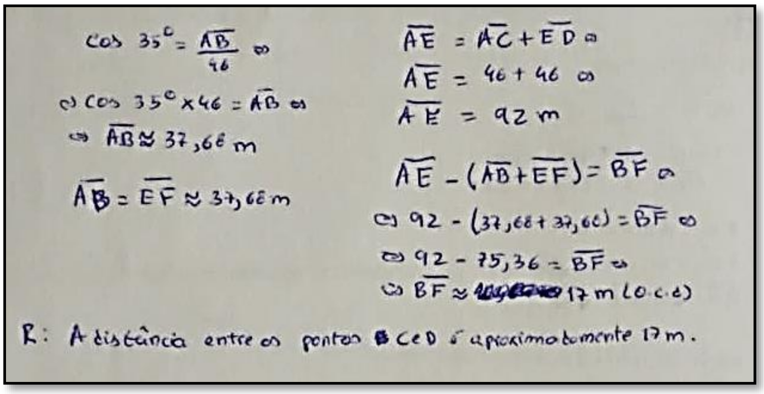
Implementar uma estratégia

Nesta última resolução apresentada (figura 5.59.), apesar de todos os aspetos referidos, e da desorganização da resolução, é evidente que o aluno percebeu como deveria proceder para resolver a questão, ou seja, mesmo que de forma pouco organizada, o aluno apresenta uma estratégia para resolver o problema, implementando-a e seguindo-a até chegar a uma resposta.

Aliás, a implementação de uma estratégia é comum à grande maioria dos alunos, incluindo naqueles que não conseguem chegar à resposta correta.

No conjunto de alunos que conseguiram chegar à resposta correta (nove), é possível dividi-los em três subconjuntos. O primeiro subconjunto corresponde aos alunos que apresentam uma estratégia implementada de forma completa, uma vez que justificam tudo o que é necessário, fundamentando os passos dessa estratégia.

É interessante notar que os dois alunos que integram este subgrupo não recorreram aos critérios de igualdade de triângulos, apoiando a sua fundamentação na realização da razão trigonométrica associada ao outro comprimento pretendido, de forma a mostrar que era, efetivamente, igual ao primeiro (figura 5.60.).



$\cos 35^\circ = \frac{\overline{AB}}{46} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 35^\circ \times 46 = \overline{AB} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{AB} \approx 37,68$ m

$\overline{AB} = \overline{EF} \approx 37,68$ m

$\overline{AE} = \overline{AC} + \overline{ED} \Leftrightarrow$

$\overline{AE} = 46 + 46 \Leftrightarrow$

$\overline{AE} = 92$ m

$\overline{AE} - (\overline{AB} + \overline{EF}) = \overline{BF} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 92 - (37,68 + 37,68) = \overline{BF} \Leftrightarrow$

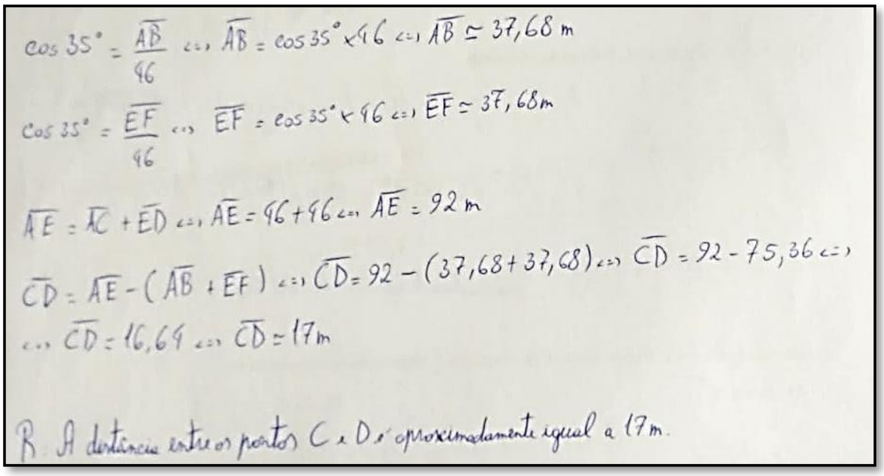
$\Leftrightarrow 92 - 75,36 = \overline{BF} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{BF} \approx$ 17 m (c.q.d.)

R: A distância entre os pontos C e D é aproximadamente 17 m.

***Figura 5.60**: Resolução pergunta 5 da questão de aula pelo B*

O segundo subgrupo diz respeito aos alunos que não justificaram devidamente tudo o que era necessário, assumindo que $\overline{AB} = \overline{EF}$, sem a apresentação de uma justificação (figura 5.61.)



$\cos 35^\circ = \frac{\overline{AB}}{46} \Leftrightarrow \overline{AB} = \cos 35^\circ \times 46 \Leftrightarrow \overline{AB} \simeq 37,68$ m

$\cos 35^\circ = \frac{\overline{EF}}{46} \Leftrightarrow \overline{EF} = \cos 35^\circ \times 46 \Leftrightarrow \overline{EF} \simeq 37,68$ m

$\overline{AE} = \overline{AC} + \overline{ED} \Leftrightarrow \overline{AE} = 46 + 46 \Leftrightarrow \overline{AE} = 92$ m

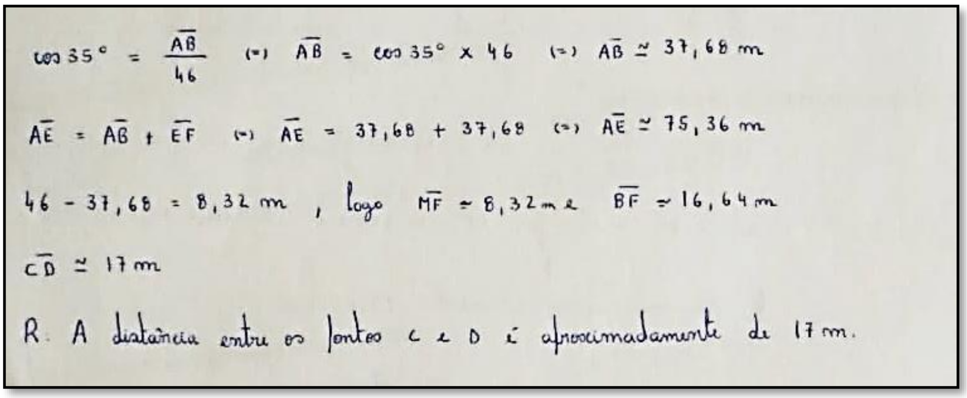
$\overline{CD} = \overline{AE} - (\overline{AB} + \overline{EF}) \Leftrightarrow \overline{CD} = 92 - (37,68 + 37,68) \Leftrightarrow \overline{CD} = 92 - 75,36 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \overline{CD} = 16,64 \Leftrightarrow \overline{CD} \simeq 17$ m

R: A distância entre os pontos C e D é aproximadamente igual a 17 m.

***Figura 5.61**: Resolução da pergunta 5 da questão de aula pela aluna Q*

Este é o maior subconjunto (sete alunos), onde seis deles optaram por seguir esta resolução. Destaco, o sétimo elemento deste grupo que utiliza uma estratégia diferente para o cálculo do comprimento pretendido. Esta aluna opta por nomear o ponto médio do segmento de reta AE, e depois de determinar o comprimento do segmento de reta AB, com recurso à Trigonometria, percebe que $\overline{CD} = \overline{AM}$. Contudo, faltou incluir um segmento de reta para que os cálculos fizessem sentido (figura 5.62.). A aluna faz a diferença entre o segmento de reta $[AM]$ e $[AB]$, percebendo que o resultado será metade da resposta ao problema. Faltou, apenas a justificação para o que o ponto M (como a aluna designa) fosse o ponto médio daquele segmento.



$\cos 35° = \frac{\overline{AB}}{46} \Leftrightarrow \overline{AB} = \cos 35° \times 46 \Leftrightarrow \overline{AB} \simeq 37,68$ m

$\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{EF} \Leftrightarrow \overline{AE} = 37,68 + 37,68 \Leftrightarrow \overline{AE} \simeq 75,36$ m

$46 - 37,68 = 8,32$ m , logo $\overline{MF} \simeq 8,32$ m e $\overline{BF} \simeq 16,64$ m

$\overline{CD} \simeq 17$ m

R. A distância entre os pontos C e D é aproximadamente de 17 m.

***Figura 5.62**: Resolução da pergunta 5 da QA pela aluna O*

A seguinte tabela (5.17.) apresenta o número de alunos que implementaram uma estratégia para resolver o problema. Verifica-se que a grande maioria dos alunos (82%) implementa uma estratégia para resolver o problema, existindo apenas um aluno, dos que responderam à questão, que não apresenta qualquer tipo de estratégia.

***Tabela 5.17**: Alunos que implementam uma estratégia para resolver a pergunta 5 – questão de aula*

Alunos que	Frequência Absoluta (n.º de alunos)	Frequência relativa (em %)
Implementam uma estratégia	14	82%
Não implementam uma estratégia	1	6%
Sem resposta	2	12%
Total	17	100%

Percebe-se assim, que o número de alunos que implementa uma estratégia é superior (mais 5 alunos) ao número que obtém a resposta correta (tabela 5.16.), o que sugere a existência de erros nos procedimentos matemáticos envolvidos, como espelha a tabela 5.18. Verifica-se, portanto, que 30% dos alunos demonstra dificuldades com conceitos trigonométricos e processos matemáticos.

***Tabela 5.18**: Erros observados na pergunta 5 na questão de aula*

Erros	Frequência Absoluta (n.º de alunos)	Frequência relativa (em %)
Aplicação da razão trigonométrica errada	1	6%
Problemas com arredondamentos	4	24%
Sem erros procedimentais na resolução	12	70%
Total	17	100%

A pergunta 7 do teste escrito (Anexo 22), realizado no dia 25 de março de 2019, é um outro problema proposto aos alunos (figura 5.63). Portanto, o fio condutor desta análise será o utilizado para o problema apresentado imediatamente anterior a este, dividindo a sua análise por duas secções: implementação de uma estratégia e chegar à resposta correta. Todos os alunos da turma (18) responderam à questão.

7. A Maria estava a brincar com um balão e este ficou preso num poste. Observa a figura seguinte, onde se verifica que:

$[ABC]$ é triângulo retângulo em A;

$[CDE]$ é triângulo retângulo em D;

$[AC]$ é paralelo a $[DE]$

$\overline{CB} = 5\ m$ e $\overline{DE} = 1{,}4\ m$;

$C\hat{E}D = 70°$ e $A\hat{C}B = 30°$

A Maria tem 1,6 $metros$ de altura.

Determina a distância do balão, no ponto B, ao solo.

Apresenta a resposta com aproximação às décimas do metro.

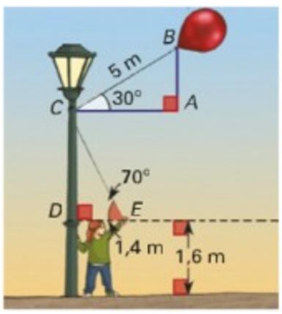


***Figura 5.63**: Enunciado da pergunta 7 do teste escrito*

Obter a resposta correta

No que diz respeito à correção da resposta, é possível dividir a turma em dois: os que chegam à resposta e os que não o conseguem fazer.

Para a resolução deste problema era necessário calcular, no mínimo, duas razões trigonométricas. Os alunos que erram na escolha das razões trigonométricas fazem-no numa só, acertando a outra, como se atesta na figura 5.64., onde o aluno opta corretamente pela razão tangente do ângulo de 70° para determinar o $\overline{CD}$, porém, volta a escolher a razão tangente do ângulo de 30° para determinar $\overline{AB}$.

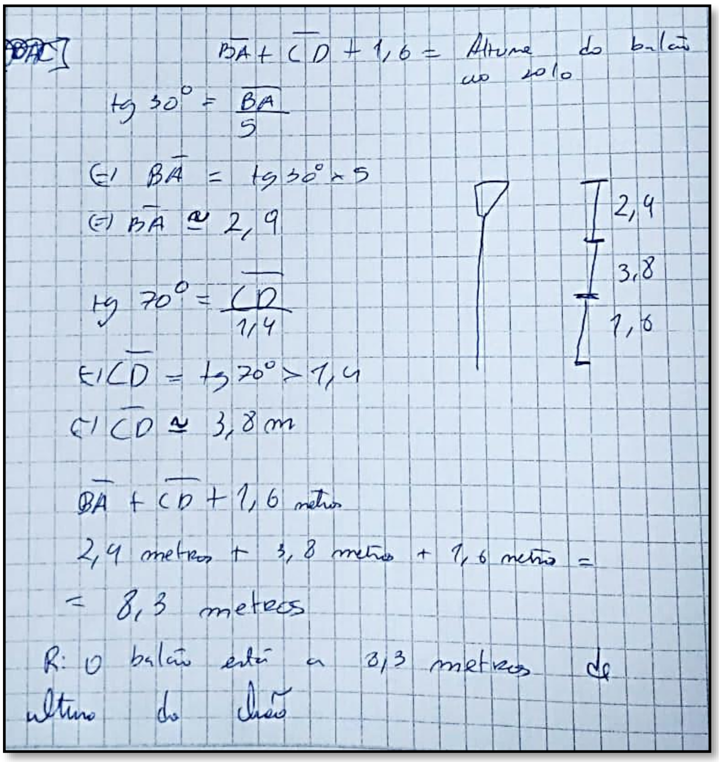


***Figura 5.64**: Resolução da pergunta 7 do teste escrito pelo aluno H*

A figura 5.65. serve para exemplificar as resoluções dos alunos que devido a erros em cálculos numéricos não chegam à resposta correta. Verifica-se que a aluna mobilizou corretamente as razões trigonométricas e efetuou os seus cálculos devidamente, no entanto, no momento de preservar o número mínimo de casas que lhe garantisse um resultado final mais fiel ao pretendido, não o fez, comprometendo o resultado final.

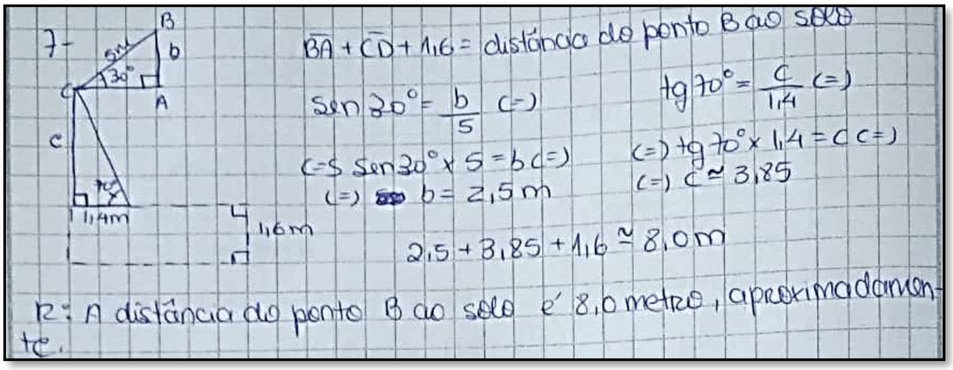


***Figura 5.65**: Resolução da pergunta 7 do teste escrito pela aluna N*

Há cinco alunos (28%) que não conseguem obter a uma resposta correta, no entanto, a grande maioria da turma, 72% consegue determinar o resultado final correto (tabela 5.19.).

***Tabela 5.19**: Alunos que obtêm a resposta correta da pergunta 7 – teste escrito*

Alunos que	**Frequência Absoluta (n.º de alunos)**	**Frequência relativa (em %)**
Obtêm a resposta correta	13	72%
Não obtêm a resposta correta	5	28%
Total	18	100%

Três alunos não obtêm a resposta correta por questões ligadas a cálculo numérico e outros dois por erros relacionados com a escolha das razões trigonométricas, como reflete a tabela seguinte (5.20.)

***Tabela 5.20**: Erros observados na pergunta 7 – teste escrito*

Erros	**Frequência Absoluta (n.º de alunos)**	**Frequência relativa (em %)**
Aplicação da razão trigonométrica errada	2	6%
Problemas com arredondamentos	3	24%
Sem erros procedimentais na resolução	13	70%
Total	18	100%

Implementar uma estratégia

Observando a figura 5.65. consegue-se perceber que o aluno faz uma representação da situação (lado direito da resolução), e percebe que para determinar a altura do balão precisa de adicionar três comprimentos, sugerindo a estratégia implementada pelo aluno.

Esta estratégia de calcular os comprimentos em falta é comum a todos os alunos, havendo dois alunos que decidem calcular de forma ligeiramente diferente $\overline{CD}$ (figura 5.66.). Estes alunos calculam primeiramente $\overline{CE}$ que representa o comprimento da hipotenusa do triângulo, e depois com o valor obtido a partir desse cálculo, determinam o comprimento desejado. É interessante notar que o que o aluno fez foi calcular a tangente do ângulo de $70°$ por dois passos, mas sem evocar esta razão.

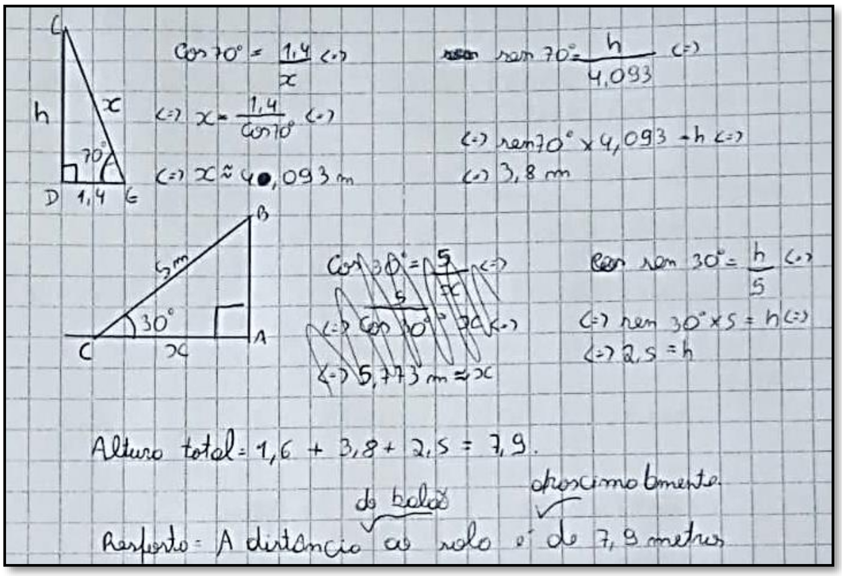


***Figura 5.66**: Resolução da pergunta 7 do teste escrito pelo aluno P*

Todos os alunos, incluindo os que não conseguem obter o valor final correto, são capazes de implementar uma estratégia para resolver o problema, havendo dois que optam por acrescentar um cálculo trigonométrico, que era desnecessário.

5.2.2. Demonstrações

Nesta subsecção pretende-se compreender em que medida é que os alunos são bem-sucedidos na realização de demonstrações.

Um momento em que os alunos se confrontaram com uma demonstração foi na pergunta 5 da ficha 15 (Anexo 20), que foi proposta no dia 19 de março de 2019 (figura 5.67.). Mais uma vez se sublinha que o objetivo desta ficha era promover o trabalho autónomo por parte dos alunos e, portanto, cada um a foi resolvendo ao seu ritmo de trabalho, não havendo muitas resoluções disponíveis para análise.

5. Na figura está representado um triângulo retângulo, em que a, b e c designam, respetivamente, as medidas dos catetos e da hipotenusa. Prova que o valor de $cos\alpha \times sen\beta + sen\alpha \times cos\beta$ é 1.

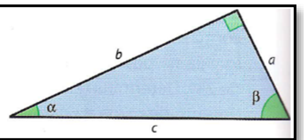
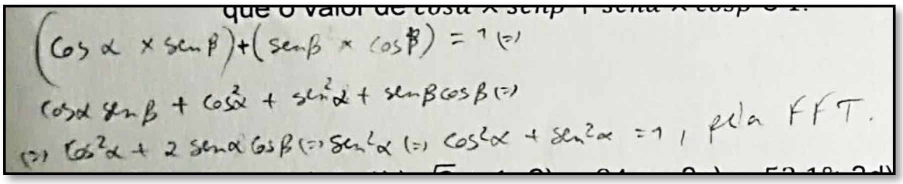


Figura 5.67*: Enunciado da pergunta 5 da ficha 15*

Dos sete alunos que entregaram esta ficha, três não apresentaram qualquer resposta a esta questão, sobrando, para análise, quatro resoluções, sendo possível dividi-las em três tipos.

A resolução do tipo I diz respeito ao aluno que apresentou uma demonstração incorreta (figura 5.68.). Como se pode observar na sua resolução, o erro principia logo ao passar a informação do enunciado, onde em vez de $sen\ \beta$ deveria estar $sen\ \alpha$. Nos cálculos que se seguem o aluno faz aparecer duas novas parcelas, $cos^2\ \alpha$ e $sen^2\alpha$, que não se entende de onde vêm. Pelo caminho perde o segundo membro da equação e troca o sinal de igual com o da soma. No final, da mesma forma que faz aparecer $cos^2\ \alpha$ e $sen^2\alpha$, faz desaparecer $2sen\alpha cos\beta$, para ficar com o que dá jeito, a FFT. Nota-se uma grande confusão na resolução desta alínea, porém, um aspeto positivo a destacar é que o aluno para concluir a validade da última igualdade que escreve, mobiliza o seu conhecimento acerca das relações entre as razões trigonométricas.


$(\cos\alpha \times sen\beta) + (sen\beta \times \cos\beta) = 1 \Leftrightarrow$

$\cos\alpha\, sen\beta + \cos^2\alpha + sen^2\alpha + sen\beta\cos\beta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha + 2\, sen\alpha\cos\beta \Leftrightarrow sen^2\alpha \Leftrightarrow \cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$, pela FFT.

Figura 5.68*: Resolução da pergunta 5 da ficha 15 pelo aluno I*

A resolução do tipo II refere-se a um aluno que deixa a demonstração incompleta (figura 5.69.). O aluno inicia a demonstração corretamente, no entanto, não realiza os produtos que registou, e não concluindo a demonstração. Salienta-se a utilização da representação geométrica do triângulo, e a correta aplicação das definições das razões trigonométricas em causa.

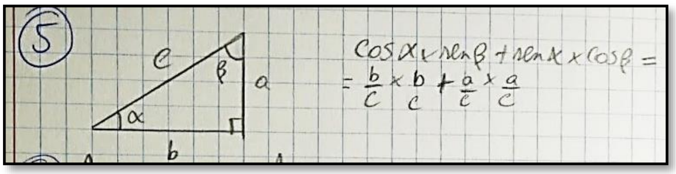


***Figura 5.69**: Resolução da pergunta 5 da ficha 15 pelo aluno B*

As resoluções do tipo III, as mais representadas, são aquelas em que os alunos apresentam os cálculos de forma correta, concluindo a demonstração. A figura seguinte, 5.70., é uma dessas resoluções. Pode-se observar que a aluna, apesar de não ter feito a representação do triângulo na sua folha de resolução, utiliza-a, visto que antes de começar a demonstração propriamente dita, define as razões trigonométricas que surgem na expressão dada. Faltou, no entanto, a explicitação do uso do Teorema de Pitágoras para justificar a razão pela qual $b^2 + a^2 = c^2$.

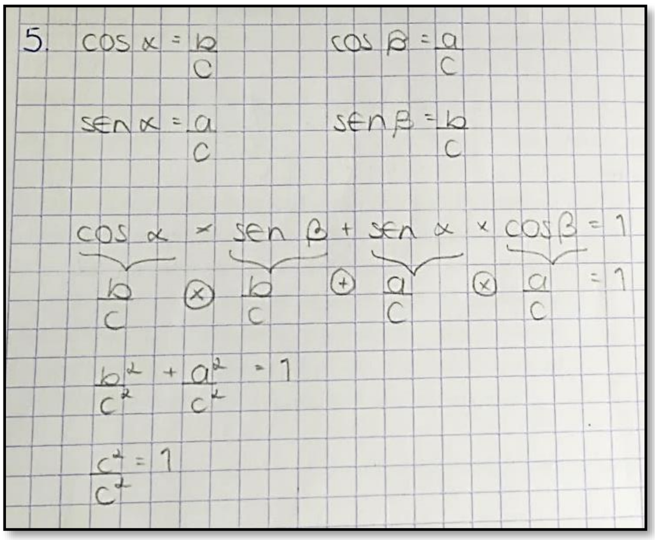


***Figura 5.70**: Resolução da pergunta 5 da ficha 15 pela aluna D*

Interessa ainda observar (figura 5.71.) a demonstração da outra aluna que se inclui nas resoluções deste tipo (III), uma vez que, à semelhança da aluna anterior (figura 5.70.), começa pela definição das razões trigonométricas, porém, escreve que $cos\,\alpha = sen\,\beta$ e que $sen\,\alpha = cos\,\beta$, sugerindo que, intuitivamente, utilizou a relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares. É curioso notar que esta aluna mobiliza a FFT para justificar a igualdade final, sem, no entanto, a evocar, visto que opta por escrever a mesma expressão trocando as parcelas do primeiro membro, evidenciando que esta troa surge pelo reconhecimento desta relação entre as razões trigonométricas.

***Figura 5.71**: Resolução da pergunta 5 da ficha 15 pela aluna Q*

Portanto, de forma geral, e como reflete a tabela 5.21., dos apenas sete alunos que apresentaram a resolução desta ficha, quatro respondem a esta questão, sendo que um deles fá-lo incorretamente (resolução do tipo I), outro não tem a resolução completa (resolução do tipo II) e outras duas, apresentam duas demonstrações corretas (resolução do tipo III), mas diferentes, faltando em ambas uma justificação para a conclusão desejada.

***Tabela 5.21**: Respostas dos alunos à pergunta 5 – ficha 15*

Resoluções do tipo	**Frequência absoluta (em alunos)**	**Frequência Relativa (em %)**
I	1	14%
II	1	14%
III	2	29%
Sem resposta	3	43%
Total	7	100%

Também na pergunta 16 do teste escrito (Anexo 22) os alunos puderam realizar uma demonstração. Nesta, deveriam utilizar as relações entre as razões trigonométricas (figura 5.72.). O teste foi realizado no dia 25 de março de 2019, tendo sido o último momento da intervenção.

16. Prova que a relação seguinte é válida para qualquer ângulo agudo de amplitude α:

$$sen\ \alpha \times cos\alpha \times tg\alpha + cos^2\ \alpha = 1$$

***Figura 5.72**: Enunciado da pergunta 16 do teste escrito*

Dos 18 alunos integrantes da turma, apenas dois não responderam a esta pergunta. Com os restantes 16 alunos, conseguimos diferenciar quatro tipos de resolução.

A resolução do tipo I refere-se aos alunos que para demonstrar esta relação atribuem valores ao ângulo alfa, assumindo alguns casos particulares, e dando por terminada a demonstração. Como se pode observar na figura 5.73., assim que o aluno testa dois casos particulares, atribuindo dois diferentes valores ao ângulo alfa, responde que "a relação dá sempre 1".

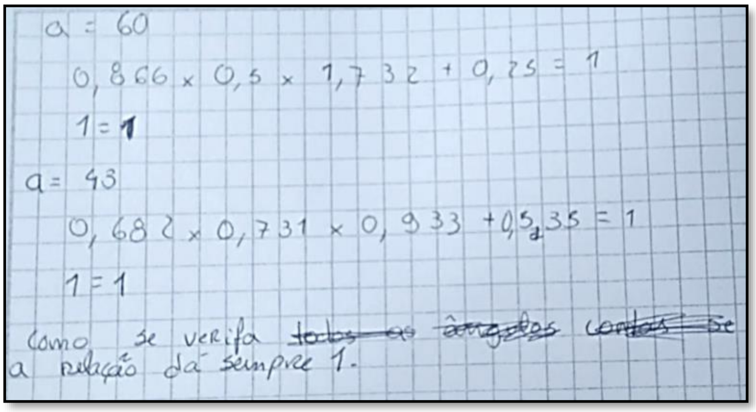


Figura 5.73: *Resolução da pergunta 16 do teste pelo aluno S*

A resolução do tipo II diz respeito a uma única aluna, que não faz cálculos, nem testa nenhum caso particular, simplesmente justificando que a relação é sempre válida porque "aplica as razões trigonométricas". Não se percebe, contudo, por que razão a aluna não aplica as razões trigonométricas, uma vez que ela própria escreve que é esse o caminho (figura 5.74.).

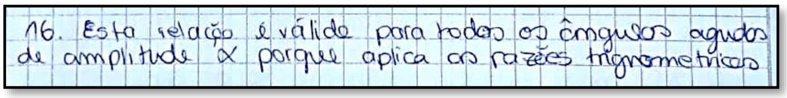


Figura 5.74: Resolução da pergunta 16 do teste pela aluna L

O maior grupo de alunos é aquele que apresenta resoluções do tipo III, que envolvem cálculos corretos necessários para se chegar a uma igualdade verdadeira, no entanto, não apresentam justificação para a validação da igualdade a que chegam. Observa-se (figura 5.75.) que este aluno desenvolve corretamente a parte algébrica, porém não justifica que relação entre as razões trigonométricas lhe permite concluir que $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ (FFT).

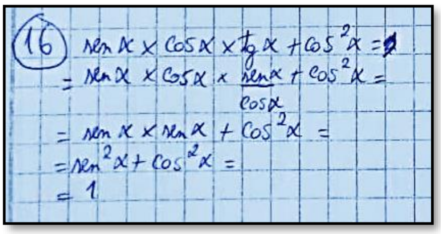


***Figura 5.75**: Resolução da pergunta 16 do teste pelo aluno B*

Finalmente, o último tipo de resolução é o IV, onde a demonstração é apresentada de forma correta, manipulando adequadamente a parte algébrica e, posteriormente, mobilizando as relações entre as razões trigonométricas de forma oportuna, ou seja, como meio de argumentação (figura 5.76.). O aluno depois de todos os cálculos efetuados, conclui a validade da relação apresentada pela Fórmula Fundamental da Trigonometria (FFT).

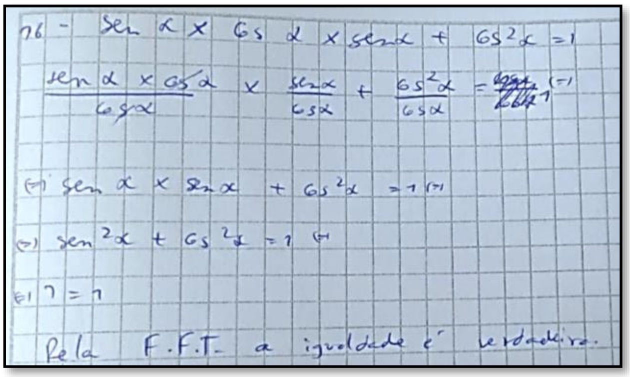


***Figura 5.76**: Resolução da pergunta 16 do teste do aluno I*

Pode sistematizar-se na tabela 5.22., aquilo que foi analisado nesta demonstração. Podemos verificar que cerca de $56\%\ (39\% + 17\%)$ da turma consegue compreender o que deve ser realizado em questões deste tipo, percebendo que se trata de uma demonstração. Porém, apenas 17% atingiu plenamente o objetivo deste tipo de tarefa, dado que somente estes alunos apresentaram as justificações necessárias.

Tabela 5.22: Respostas dos alunos à pergunta 16 – teste escrito

Resoluções do tipo	Frequência absoluta (em alunos)	Frequência Relativa (em %)
I	5	27%
II	1	6%
III	7	39%
IV	3	17%
Sem resposta	2	11%
Total	18	100%

5.2.3. Os tópicos trigonométricos e os problemas e demonstrações

Pretende-se nesta subsecção tirar algumas ilações sobre a relação entre a resolução de problemas e demonstrações e os tópicos de Trigonometria lecionados.

Principiando pela resolução de problemas, verifica-se que na questão de aula (Anexo 21) pouco mais de metade dos alunos (tabela 5.16.) consegue obter a resposta correta, ao passo que no teste escrito (Anexo 22), esta percentagem sobre consideravelmente (tabela 5.19.). Esta subida também se verifica no que toca à implementação de uma estratégia, tendo a totalidade da turma atingindo este ponto na realização do teste escrito (Anexo 22). Dado que o teste escrito foi o último momento da intervenção, pode-se perceber que os alunos compreenderam a natureza desta tarefa e foram bem-sucedidos na realização da mesma. Há, no entanto, uma pequena parte dos alunos (tabelas 5.18. e 5.20.) que tanto num momento como noutro, não mobilizam a razão trigonométrica correta, tendo, mesmo assim, este número sido mais positivo no teste, já que o número de alunos no teste escrito aumentou relativamente ao total da questão de aula. É ainda de sublinhar que alguns alunos (tabelas 5.18.e 5.20.) não obtêm a resposta correta por cometer erros procedimentais, como é o caso dos arredondamentos.

Esta questão com os arredondamentos foi uma das dificuldades mais evidenciadas pelos alunos na resolução de problemas, que se tornou, muitas vezes, um obstáculo na obtenção da resposta correta. Isto é bem evidente na diferença percentual entre os alunos que implementam uma estratégia e os que obtém a resposta correta, tanto no teste escrito (Anexo 22) como na questão de aula (Anexo 21). Provando, assim, que apesar dos alunos compreenderem o que devem realizar, e como o fazer, mobilizando os seus conhecimentos trigonométricos, apresentam dificuldades com o cálculo numérico.

Relativamente às demonstrações, na ficha 15 (Anexo 20) uma pequena percentagem dos alunos (tabela 5.21.) que apresenta resolução realiza a demonstração de forma incompleta, faltando, somente, uma justificação apropriada (mobilização do Teorema de Pitágoras). Sublinhe-se, todavia, que todos os alunos que realizaram esta pergunta escrevem corretamente as razões trigonométricas pedidas, evidenciando o seu domínio. Já no teste escrito (Anexo 22), pouco mais de metade dos alunos apresentam a demonstração pretendida, no entanto, destes, poucos são os que justificam a validade das igualdades apresentadas recorrendo a argumentos, que neste caso, seriam as relações entre as razões trigonométricas (tabela 5.22.). Ainda nesta pergunta, há uma parte dos alunos que dá por terminada a demonstração quando apresenta casos particulares. Porém, é interessante verificar que todos os alunos conseguem reconhecer a relação entre as três razões trigonométricas (tabela 5.22.). Em relação à FFT este número desce porque, creio que para os alunos a igualdade é tão óbvia que consideraram dispensáveis mais justificações.

A falta de compreensão da natureza de uma tarefa deste tipo pode ser a razão pela qual é feita a apresentação de casos particulares como forma de responder à questão. Esta ausência de entendimento é também visível nos alunos que não sentiram necessidade de apresentar nenhum cálculo, por acharem óbvia e certa a relação apresentada.

Assim, os alunos, na sua generalidade, são bem-sucedidos na resolução de problemas e nas demonstrações, sendo que muitas vezes, não desenvolvem mais a sua resolução por evidenciarem dificuldades a nível algébrico e numérico, e não nos conteúdos matemáticos da Trigonometria propriamente ditos.

Capítulo 6 : Conclusões

O presente capítulo visa responder às questões do estudo inicialmente formuladas e, ainda, realizar um balanço reflexivo sobre a experiência formativa da realização deste estudo e da prática de ensino supervisionada. Por isso, começarei por sintetizar o estudo efetuado, prosseguirei dando resposta às questões de investigação, a partir da análise de dados realizada, e terminarei com uma reflexão acerca do estudo e das suas implicações para a minha prática profissional.

6.1. Síntese do estudo

Este estudo, que decorreu da intervenção realizada com uma turma de 9.º ano de escolaridade do Colégio Militar, teve por objetivo compreender as aprendizagens que estes alunos realizaram nos tópicos da Trigonometria a partir da resolução de tarefas diversificadas. Para melhor atingir este objetivo, elaborei três questões de investigação: i. Que conhecimentos revelam os alunos dos tópicos de Trigonometria?, ii. Como mobilizam os alunos os seus conhecimentos de Trigonometria na resolução de diferentes tipos de tarefas? e, iii. Qual o contributo dos diferentes tipos de tarefas para a aprendizagem dos tópicos de Trigonometria?.

Durante a minha intervenção optei por uma abordagem de ensino exploratório, procurando colocar o aluno no centro do processo de ensino e aprendizagem. Procurei, ainda, que as aulas fossem organizadas em torno de três grandes momentos: introdução da tarefa, trabalho autónomo dos alunos e discussão em grande grupo. Assim, o trabalho individual, o trabalho a pares ou trios, ou ainda a discussão em grande grupo foram as minhas opções relativamente aos modos de trabalho. As diferentes configurações de trabalho, previamente pensada por mim, iam-se alterando conforme o objetivo e a duração da aula e os alunos presentes na mesma, mas tentando, sempre, preservar os mesmos grupos de trabalho,

Procurei que as tarefas propostas fossem tão diversificadas quanto possível, tendo sido selecionadas ou elaboradas tarefas de exploração, exercícios, problemas e demonstrações no âmbito da Trigonometria.

Para desenvolver este estudo, recorri à observação participante, suportando-a com notas de campo e gravação vídeo das aulas, e ainda à recolha documental das resoluções dos alunos, tanto das tarefas propostas, como da questão de aula e do teste escrito de avaliação sumativa. Na análise de dados, utilizei unicamente as resoluções dos alunos nos diversos momentos da intervenção, tendo as notas de campo e as gravações vídeo das aulas assumido um papel complementar para a minha reflexão sobre a experiência de uma forma geral.

6.2. Principais conclusões do estudo

i. Que conhecimentos revelam os alunos dos tópicos de Trigonometria?

A natureza eminentemente abstrata do conceito "conhecimentos" (Bolisani & Bratianu, 2018) torna a resposta a esta pergunta numa tarefa complexa. O conhecimento é uma crença verdadeira e justificada (Bolisani & Bratianu, 2018), o que implica que tem de existir por parte dos alunos uma apropriação destes para que ocorra a sua aprendizagem. Dado que os conhecimentos a adquirir estão estipulados pelo Programa e Metas Curriculares (MEC, 2013) da disciplina, interessa compreender em que medida ocorreu esta apropriação.

Pela análise de dados, verifica-se que os tópicos onde os alunos tiveram mais sucesso foram no reconhecimento das razões trigonométricas de um ângulo agudo e das relações entre as razões trigonométricas. Destes, o tópico reconhecimento das razões trigonométricas é aquele que evidencia ter ficado mais bem consolidado pelos alunos, dado que praticamente nenhum aluno apresenta dificuldades em reconhecer e definir adequadamente as razões trigonométricas pedidas. Já em relação às relações entre as razões trigonométricas, as diferentes situações onde estas surgem, originam a flutuação nas percentagens de sucesso no reconhecimento das mesmas, sendo que em perguntas que requeiram menor nível de manipulação algébrica, os alunos são mais bem-sucedidos neste reconhecimento, como também sucedeu com o estudo de Leitão (2018).

Os tópicos onde houve um sucesso relativo na sua aprendizagem, isto é, onde cerca de metade da turma foi bem-sucedida, foram os da invariância nas razões trigonométricas de um ângulo agudo e o do reconhecimento dos valores exatos das razões trigonométricas dos ângulos de referência.

Tendo em conta os resultados obtidos, o tópico que merecia um maior trabalho para que a sua consolidação se efetivasse é intervalo de variação das razões trigonométricas, uma vez que foi aqueles onde os alunos manifestaram maiores dificuldades na sua mobilização. Porém, é importante sublinhar que todos os alunos perceberam que as razões trigonométricas nunca podem tomar valores negativos.

No que diz respeito à relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares, da análise de dados, é possível verificar que todos os alunos adquiram este conhecimento. Sublinhe-se, porém, que a pergunta analisada é bastante direta e que a análise incidiu numa única questão sobre este tópico, num pequeno grupo da turma.

ii. Como mobilizam os alunos os seus conhecimentos de Trigonometria na resolução de diferentes tipos de tarefas?

A mobilização e/ou operacionalização dos conhecimentos transparece em tarefas onde os alunos tenham de os utilizar, ou seja, tarefas onde seja possível analisar o *saber-fazer* dos alunos (Abrantes, Serrazina & Oliveira, 1999; Bolisani & Bratianu, 2018; Santos, 2003). Assim, foram selecionadas e analisadas tarefas com este sentido. Entende-se, portanto, que, tendo em conta a tipologia das tarefas (Ponte, 2005; Swan, 2017) a análise tenha recaído sobre a resolução de problemas de aplicação e sobre as demonstrações, uma vez que os exercícios e as tarefas de exploração possibilitam o reconhecimento e aplicação direta dos conhecimentos, ao passo que os problemas e demonstrações permitem compreender como é feito esse reconhecimento e aplicação, sem o questionar direta e objetivamente, já que os alunos terão de analisar a situação e entender qual(is) o(s) conhecimento(s) mais adequado(s) a mobilizar.

No que diz respeito à resolução de problemas, a partir da análise de dados verifica-se que em ambas as tarefas, o número de alunos que implementa uma estratégia é superior ao número de alunos que obtém a resposta correta, o que pode levar a duas conclusões: 1) os alunos cometeram erros procedimentais e/ou 2) os alunos não implementaram uma estratégia adequada. Os resultados evidenciam que a não obtenção de uma resposta correta, na grande maioria dos casos, está intimamente ligada com erros algébricos cometidos, essencialmente no campo dos arredondamentos e valores aproximados, denotando que as dificuldades que os alunos mais sentiram neste tipo de tarefas não têm que ver com os conhecimentos trigonométricos em si, o que também se verificou no estudo de Leitão (2018) e de Miranda (2010). Porém, há uma pequena parte dos alunos que não utiliza os seus conhecimentos trigonométricos de forma correta, seja por aparente distração ou por não se terem apropriado deles convenientemente.

Um aspeto muito positivo que se evidencia neste estudo, é que na atividade de resolução de problemas, os alunos, de uma forma ou de outra, conseguem delinear e implementar uma estratégia de resolução adequada, dadas as elevadas percentagens de alunos que o realizam. A implementação de uma estratégia na resolução de um problema é condição necessária para o sucesso neste tipo de tarefa (NCTM, 2007; Vale, Pimentel & Barbosa, 2015). Aliás, a presença deste aspeto na resolução de um problema certifica o desenvolvimento da competência estratégica no aluno em causa, visto que segundo Swan (2017) esta competência é desenvolvida pela formulação e operacionalização de uma sequência de diferentes etapas, o que se verifica quando os alunos apresentam, por exemplo, a expressão que permite obter a resposta correta, sendo cada um dos constituintes dessa expressão correspondente à operacionalização de cada etapa.

Para além do que já foi enunciado, e uma vez que em ambos os problemas estava presente um contexto de semi-realidade (Skovsmose, 2000), os alunos conseguiram, na sua generalidade, ainda, discernir acerca do resultado obtido, ou seja, verificar a sua validade tendo em conta o contexto da pergunta como evidencia a análise de dados por meio das percentagens de alunos que conseguem obter a resposta correta. Esta atitude perante este tipo de tarefa mostra que os alunos para além de terem refletido acerca da pergunta, fizeram-no também para a sua resolução e respetiva validade, promovendo a sua competência crítica (NCTM, 2007; Swan, 2017).

No que concerne às demonstrações, da análise de dados retira-se que a taxa de sucesso neste tipo de tarefas já é mais baixa, em comparação com a resolução de problemas. Há uma parte significativa dos alunos que não responde a este tipo de questões. Dos que respondem, existe grande número que apresenta alguns casos particulares para a realização das demonstrações; outros, apesar do correto desenvolvimento algébrico, não justificam na totalidade a validade das expressões encontradas, sendo reduzido o número de alunos que consegue manipular algebricamente as expressões e apresentar as justificações adequadas, mobilizando para isso os seus conhecimentos sobre os tópicos trigonométricos.

O elevado número de alunos que não responde a estas questões reflete a reduzida familiarização com a demonstração e a perceção que estes têm sobre esta, como também sucedeu com o estudo de Mendes (2016). A apresentação de casos particulares pode ser um bom ponto de partida para a realização da demonstração, já que a verificação de alguns casos pode ser mostrar-se muito significativa no que toca à confirmação da validação do resultado que se pretende demonstrar (De Villiers, 2002; Swan, 2017), sendo esse convencimento essencial para o sucesso deste tipo de tarefa. A não argumentação, por parte dos alunos, acerca da validade da expressão a que chegam por meio de cálculos algébricos, pode ser motivada pela veracidade óbvia que esta representa, levando-os a considerar desnecessárias justificações adicionais (Machado & Santos, 2011). E, creio que foi isto que sucedeu em ambas as demonstrações analisadas, uma vez que, em outras oportunidades, os alunos conseguem reconhecer e mobilizar adequadamente o tópico referido.

Saliento, ainda assim, que nenhum aluno apresentou uma resposta, como se estivesse a realizar um problema, dando a entender que perceberam que as demonstrações são distintas dos restantes tipos de tarefa, apesar da maior dificuldade que sentiram na sua realização.

Em suma, os alunos conseguem fazer uma melhor mobilização dos seus conhecimentos trigonométricos quando resolvem problemas, manifestando maiores dificuldades na realização de demonstrações. Contudo, e como é evidente nos resultados, os erros relativos aos tópicos trigonométricos representam uma percentagem muito reduzida dos erros mais observados nas resoluções, confirmando que as dificuldades emergem mais pelo tipo de tarefa proposto e do que pelo conteúdo matemático.

iii. Qual o contributo dos diferentes tipos de tarefas para a aprendizagem dos tópicos de Trigonometria?

Considerando o que advoga Ponte (2005), foram propostas diversas tarefas para se atingirem os objetivos curriculares pretendidos.

Os exercícios estiveram presentes em quase todos os tópicos, com exceção dos valores exatos dos ângulos de referência. Como se pretendia que os alunos conhecessem e adquirissem a linguagem característica da Trigonometria e se familiarizassem com os conceitos da Unidade Didática, propor tarefas que promovem a compreensão concetual e o conhecimento factual e a fluência processual (Swan, 2017), como é o caso dos exercícios, seria fundamental. A análise de dados evidencia que nos tópicos onde este tipo de tarefa foi mais frequente, os alunos apresentaram um melhor desempenho, apropriando-se, de uma forma mais correta da linguagem trigonométrica, dada a consolidação que puderam realizar dos mesmos. Um exemplo claro onde isto não sucedeu foi no tópico do intervalo de variação das razões trigonométricas, onde são poucos os alunos que conseguem acertar na resposta de escolha múltipla, ou que escrevem corretamente esse intervalo, ilustrando que a este conhecimento não ficou devidamente consolidado, precisamente pela falta de oportunidades de consolidação. A confusão com a simbologia que deve ser utilizada quando se pretende determinar a amplitude de um ângulo a partir do conhecimento do valor da razão trigonométrica, é outro exemplo de que, apesar de os alunos entenderem o processo a realizar, concetualmente este não foi desenvolvido, dado que não o conseguiram traduzir, corretamente, para linguagem matemática. Assim, e como a atenção despendida para os diversos tópicos não foi a mesma isso refletiu-se no trabalho realizado com e pelos alunos.

Uma abordagem de ensino exploratório pede que sejam propostas tarefas de exploração como forma de introduzir os conteúdos matemáticos (Canavarro, 2011; Ponte, 2005). Isto foi realizado com os tópicos da invariância nas razões trigonométricas de um ângulo agudo e com as relações entre as razões trigonométricas de um mesmo ângulo. A análise de dados mostra que houve um maior sucesso na realização desta tarefa referente às relações entre as razões trigonométricas, tendo a grande maioria da turma conseguido concluir as relações pretendidas. Existem duas diferenças consideráveis nestas duas tarefas: o seu modo de implementação e a sua estrutura.

A tarefa sobre a invariância nas razões trigonométricas de um ângulo agudo foi apoiada pela tecnologia. Os alunos através da movimentação dos pontos de um triângulo retângulo (já representado, tal como as razões trigonométricas correspondentes, no *software*), tinham de compreender os deslocamentos que deveriam realizar e de que forma isso afetava as razões trigonométricas. Como indicam os resultados, pouco mais de metade da turma conseguiu fazer a exploração adequada da tecnologia, no entanto, é de sublinhar que todos os alunos, pela observação que fiz durante a aula, e pela posterior discussão em grande grupo, conseguiram compreender, ainda que heuristicamente, o modo como as movimentações dos pontos considerados afetavam o valor das razões trigonométricas. Creio que esta utilização da tecnologia se mostrou essencial não só porque permitiu fazer uma exploração muito mais detalhada e completa deste tópico, mas, fundamentalmente, porque contribuiu para que os alunos pudessem conjeturar com muito mais rigor e rapidez, do que se tivessem de o fazer manualmente. A precisão das construções e a possibilidade da validação de conjeturas tornam a tecnologia um verdadeiro aliado do ensino da Matemática, possibilitando promover a competência crítica dos alunos (Amado & Carreira, 2008; Leitão, 2018; Mendes, 2016). Todavia, como os alunos não estão habituados a trabalhar com mesma, o reduzido número de sucesso nesta tarefa pode advir deste facto. Adicionalmente, a estrutura da tarefa também pode ter contribuído para esta reduzida taxa de sucesso, visto que, as perguntas indicavam quais os pontos que deviam ser deslocados, e interrogavam qual era a sua relação com os valores das razões trigonométricas. Talvez, devessem ter sido elaboradas perguntas mais diretas, de forma a que todos os casos possíveis de movimentação para os pontos considerados fossem contemplados nas mesmas, permitindo que mais alunos conseguissem concluir o pretendido.

A forma como a tarefa pode ser trabalhada, quer pelo professor, quer pelos alunos influi na aprendizagem destes últimos, sendo que "o potencial educativo das tarefas pode variar significativamente" (Pires, 2011, p.31). Percebe-se, portanto, que talvez tão importante como a estrutura da tarefa e a sua tipologia é a sua implementação, apresentando-se esta última como determinante para o sucesso na aprendizagem por parte dos alunos. Concretizando esta ideia, pegando em qualquer uma das tarefas propostas e alterando um aspeto tão simples como por exemplo o tempo atribuído para o trabalho autónomo dos alunos, já traria, com toda a certeza, outro tipo de resultados, visto que, em aulas com tarefas mais abertos é necessário que seja dado tempo e espaço para que os alunos se inteirem da tarefa e consigam refletir sobre ela, de forma a poderem produzir resoluções ricas que traduzem essas análises profundas sobre as mesmas (Oliveira, Menezes & Canavarro, 2013; Ponte, 2005; Swan, 2018).

Relativamente à tarefa das relações entre as razões trigonométricas, esta apresentava perguntas mais direcionadas, onde se pedia que os alunos fizessem os cálculos necessários à conclusão das relações. Da análise de dados, observa-se que os alunos que não conseguiram conjeturar as relações desejadas foi devido, mais uma vez, a erros nos cálculos ou falta de simplificação dos mesmos.

Nos tópicos relativos ao reconhecimento das definições das razões trigonométricas e dos valores exatos dos ângulos de referência analisaram-se problemas de aplicação. No que se refere ao reconhecimento das definições das razões trigonométricas, a grande maioria da turma conseguiu fazê-lo corretamente. Já para o reconhecimento dos valores exatos dos ângulos de referência, essa percentagem não é assim tão alta.

Ambos os problemas analisados apresentavam um contexto de semi-realidade (Skovsmose, 2000), sendo que estes problemas exigiam uma resolução que se desdobrasse por várias etapas. Note-se que dado o âmbito em que foi realizado o estudo e considerando os documentos de ordem curricular que orientam a prática letiva, propor problemas não rotineiros, ou seja, problemas onde os alunos não apliquem diretamente os conceitos que estiveram a trabalhar (Swan, 2017) seria praticamente impossível. Daí, designar estes problemas como problemas de aplicação. De qualquer das formas, a promoção da competência crítica compreende, também, a resolução por etapas de uma determinada tarefa, como defende Swan (2017).

A resolução de problemas mostra-se fundamental no ensino da Matemática, sendo defendida como um aspeto central no mesmo, visto que a promoção desta atividade possibilita aos alunos compreenderem melhor conceitos ou processos matemáticos, dado que estes têm de analisar e interpretar a situação em questão de forma a solucionar o problema. (NCTM, 2007; Vale, Pimentel & Barbosa, 2015)

As demonstrações também desempenharam um papel importante nesta Unidade Didática, nomeadamente no tópico das relações entre as razões trigonométricas. Creio que as dificuldades sentidas pelos alunos na realização das demonstrações, foram também potenciadas pelo facto de este não ser um tipo de tarefa fácil para o entendimento de alunos tão novos e pouco experientes com a mesma. Ainda assim, propor tarefas deste tipo é imperativo para construir uma compreensão acerca da Matemática (NCTM, 2007), ou como designa Swan (2017), o desenvolvimento da compreensão concetual.

Portanto e reafirmando o que já foi mencionado, as maiores dificuldades que emergiram na resolução deste tipo de tarefas prendem-se, essencialmente, com o cálculo algébrico e numérico.

Resumindo, a análise de dados mostra que nos tópicos de Trigonometria onde foram trabalhos diferentes tipos de tarefas, os alunos foram mais bem-sucedidos na sua realização e, consequentemente, na compreensão do referido tópico, o que reforça a importância de propor tarefas diversificadas no ensino-aprendizagem da Matemática (Ponte, 2005).

6.3. Reflexão final

A concluir este trabalho, apresento um balanço reflexivo acerca do mesmo, fazendo uma retrospetiva sobre a minha intervenção destacando aquilo que contribuiu para a minha formação enquanto professora.

Da minha experiência enquanto aluna, fui me convencendo que a postura com que o professor se apresenta na lecionação da sua disciplina muito contribuiu para o olhar que os alunos têm sobre a mesma. Com a minha intervenção, ganho a convicção de que, para além desta postura, a relação pedagógica que vai sendo construída com os alunos é fundamental na forma como estes encaram a disciplina, e, consequentemente, na postura que têm sobre esta. Portanto, procurei sempre que a aula de Matemática fosse um espaço onde os alunos estivessem bem-dispostos, e, principalmente, tivessem gosto por aprender Matemática. Creio que isso foi atingido pela constante disposição que os alunos, mesmo em momentos de maior cansaço, sempre apresentaram para trabalharem da forma que lhes propunha, seja individualmente ou em grupos, abraçando, com grande empenho a diversidade de tarefas que ia apresentando.

Uma dificuldade que foi transversal a todas as aulas foi a da gestão de sala da aula dada a minha inexperiência e as características desta turma. Conseguir que os alunos participassem ordeiramente e que trabalhassem de forma colaborativa e eficiente, tudo isto dentro dos tempos previstos, nem sempre foi conseguido. Porém, à medida que ia ganhando mais experiência com a turma, creio que fui melhorando nestes aspetos. Um ponto positivo que também contribuiu para que ocorresse esta melhoria foi, com toda a certeza, o facto de ter acompanhado os alunos desde o início do ano letivo, e estar sempre presente nas suas aulas, o que possibilitou que os alunos me tivessem visto como alguém que está ali para os ajudar no seu desenvolvimento académico.

De todas as aulas, a aula com a tecnologia foi muito marcante para mim, não só por ser a primeira aula em que os alunos efetivamente trabalharam com o *GeoGebra*, mas principalmente pela forma como esta se desenrolou, tendo sido um marco na minha formação. Esta aula alertou-me para dois aspetos importantes 1) a forma como deve ser gerido o tempo de maneira a que a utilização da tecnologia seja maximizada a favor da aprendizagem e 2) a gestão de sala de aula que deve ser feita, tendo sempre em atenção quem já terminou a(s) tarefa(s) inicialmente proposta(s), para que lhe seja atribuído mais trabalho, de forma a que possa aproveitar o tempo de aula da melhor maneira possível.

O que ocorreu nesta aula, e à semelhança de tantas outras, veio reforçar aquilo que aprendi, teoricamente, neste curso: por muito detalhado que seja o plano de aula (que o era), nunca estão previstas todas as perguntas e/ou dificuldades dos alunos, contudo, o nível de detalhe da planificação é um fator decisivo na segurança com que o professor vai para a aula, principalmente, quando este é inexperiente, como é o meu caso.

Estes dois anos ajudaram-me muito na construção da minha identidade profissional, mostrando-me diversas metodologias e a sua eficácia. A abordagem de ensino exploratório e a diversificação das tarefas são exemplos de duas dessas metodologias que pude pôr em prática no decorrer da Unidade Didática, dando-me a convicção de que estas integrarão as minhas aulas, sempre que assim o considerar.

Tenho a plena certeza de que apesar do grande arcaboiço teórico que este mestrado me ofereceu, algumas destas ideias daqui por uns tempos já serão diferentes, considerando a mudança cada vez mais rápida que ocorre na sociedade, a todos níveis. Por isso, espero que dois aspetos que aprendi neste curso sejam lemas para a minha vida profissional: a reflexão e a aprendizagem constante. Acredito que o desenvolvimento profissional do professor ocorre na medida em que este reflete e age de acordo com essa reflexão, logo, espero que esta seja um hábito para mim. Do mesmo modo, espero que isso se ocorra com a capacidade de reconhecer que nunca vou saber tudo, e, portanto, que estou sempre em processo de construção de conhecimento.

Referências

Abrantes, P. (1999). Investigações em geometria na sala de aula. In E. Veloso, H. Fonseca, J. P. Ponte & P. Abrantes (Orgs.), *Ensino da Geometria no Virar do Milénio* (pp.153-167) Lisboa: DEFCUL.

Abrantes, P., Serrazina, L. & Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica*. Lisboa: Ministério da Educação.

Aires, L. (2015). *Paradigma qualitativo e práticas de investigação educacional.* Lisboa: Universidade Aberta.

Amado & Carreira (2008). Utilização pedagógica do computador por professores estagiários de matemática – diferenças na prática da sala de aula. In A. P. Canavarro, D. Moreira & M. I. Rocha (Orgs.), *Tecnologias e Educação Matemática* (pp. 276-289). Lisboa: SEM-SPCE.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação.* Porto: Porto Editora.

Bolisani, E., & Bratianu, C. (2018). The elusive definition of knowledge. In E. Bolisani, & C. Bratianu (2018), *Emergent knowledge strategies: Strategic thinking in knowledge management* (pp. 1-22). Cham: Springer International Publishing. DOI: 10.1007/978-3-319-60656_1.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática, 115,* 11-17.

Colégio Militar (CM). (2016). Projeto Educativo 2016/2017 a 2018/2019. Disponível em https://www.colegiomilitar.pt/documentos-estruturantes/projeto-educativo/.

De Villiers, M. (2001). Papel e funções da demonstração no trabalho com o *Sketchpad*. *Educação e Matemática*, *63*, 31-36.

Fernandes, A. C. P., & Viseu, F. A. V. (2011). Os ambientes de geometria dinâmica no desenvolvimento da capacidade de argumentação de alunos do 9° ano na aprendizagem de Geometria. In Atas ProfMat 2011 (pp. 1-13). Lisboa: APM.

Figueiral, L., Martins, A., Guimarães, H. & Abreu, M. (2013). Aprender Matemática: Porquê e para quê?. *Educação e Matemática, 125*, 61-71.

Figueirinhas, S. (2009). Notações: basta de confusões!. *Educação e Matemática, 103*, 15-19.

IEUL (2016). *Carta Ética para a Investigação em Educação e Formação do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa*. Diário da República, 2.ª série - N.º 52 – 15, de março de 2016.

Leitão, S. M. A. C. (2018). *Investigações e tecnologias no ensino da trigonometria: uma experiência no 3.º ciclo* (Trabalho de Projeto). Universidade de Lisboa, Lisboa.

Machado, S. & Santos, L. (2011). A demonstração matemática no 8.º ano no contexto de utilização do *Geometer's Sketchpad*. *Revista de Educação, XVIII*(1), 49-82.

Martins, G. et al. (2017). *Perfil dos alunos à saída da escolaridade obrigatória*. Lisboa: Direção-Geral da Educação.

Mendes, M. M. N. F. (2016). *Aprendizagem de trigonometria de alunos de 9.º ano de escolaridade com recurso ao Geogebra* (Relatório de Estágio). Universidade do Minho, Braga.

Ministério da Educação (ME). (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

Ministério da Educação e Ciência (MEC). (2013). *Programa e Metas Curriculares de Matemática do 3.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: MEC.

Ministério da Educação e Ciência (MEC). (2014). *Programa e Metas Curriculares de Matemática A Ensino Secundário*. Lisboa: MEC.

Miranda, C. J. V. (2010). *A Aprendizagem de Trigonometria do Triângulo Rectângulo através da Resolução de Problemas* (Relatório de Ensino de Prática Supervisionada): Universidade de Lisboa, Lisboa.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Nunes, F. (1996). Será de ir em grupos na aprendizagem da Matemática? In *Actas do ProfMat 96* (pp. 1-13). Almada: APM.

Oliveira, H. (2009). A Álgebra no Novo Programa de Matemática do Ensino Básico. *Educação e Matemática, 105*, 83-86.

Oliveira, H., Menezes, L. & Canavarro, A.P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: Contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante, XXII*(2), 29-53.

Pires, M. V. (2011). Tarefas de investigação na sala de aula de Matemática: práticas de uma professora de Matemática. *Quadrante, XX*(1), 31-53.

Poincaré, H. (2010). *A Invenção Matemática*. In A. J. Oliveira (Org.), *Henri Poincaré - Filosofia da Matemática. Breve antologia de textos de Filosofia da Matemática de Henri Poincaré* (pp. 55-73). Lisboa: Centro de Filosofia das Ciências da Universidade de Lisboa (CFCUL).

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2003). Gestão curricular em matemática. In *Actas do ProfMat 2003* (CD-ROM, pp. 25-39). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Investigar, ensinar e aprender. In Grupo de Trabalho sobre Investigação (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Brunheira, L., Varandas, J. M., & Ferreira, C. (1998). O trabalho do professor numa aula de investigação matemática. *Quadrante, 7*(2), 41-70.

Ponte, J. P., Quaresma, M. & Pereira, J. M. (2015). É mesmo necessário fazer planos de aula?. *Educação e Matemática, 133*, 26-35.

Ponte, J.P. & Mata-Pereira, J. (2018). A Matemática no 3.º Ciclo da Educação Básica. In Veiga, F. H. (Coord.). *O Ensino na Escola de Hoje: Teoria, Investigação e Aplicação* (pp. 43-72). Lisboa: Climepsi Editora.

Ponte, J.P. (2017). Discussões coletivas no ensino-aprendizagem da Matemática. Retirado de http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/28784/1/Ponte%20Discuss%C3%B5es%20coletivas%20%2814%20jan%202017%29.pdf.

Ponte, J.P., Branco, N. & Matos, A. (2009). *Álgebra no Enino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação – Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Santos, L. & Pinto, J. (2018). Ensino de Conteúdos Escolares: A Avaliação como fator estruturante. In Veiga, F. H. (Coord.). *O Ensino na Escola de Hoje: Teoria, Investigação e Aplicação* (pp. 503-539). Lisboa: Climepsi Editora.

Santos, L. (2003). Avaliar competências: uma tarefa impossível. *Educação e Matemática*, *74*, 16-21.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, *14*, 66-91.

Stein, M. K. & Smith, M. S. (1998). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: da investigação à prática. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *3*(4), 268-275.

Swan, M. (2017). Conceber tarefas e aulas que desenvolvam a compreensão concetual, a competência estratégica e a consciência crítica. *Educação e Matemática*, *144*, 67-72.

Swan, M. (2018). Conceber tarefas e aulas que desenvolvam a compreensão concetual, a competência estratégica e a consciência crítica. *Educação e Matemática*, *146*, 8-14.

Thompson, D. R. & Rubenstein, R. N. (2000). Learning Mathematics Vocabulary: Potential Pitfalls and Instructional Strategies. The Mathematics Teacher, 93(7), 568-574.

Vale, I., Pimentel, T. & Barbosa, A. (2015). Ensinar matemática com resolução de problemas. *Quadrante, XXIV(2), 39-60.*

Veloso, E. (1997). As notações em geometria. *Educação e Matemática, 42*, 35-36.

Anexos

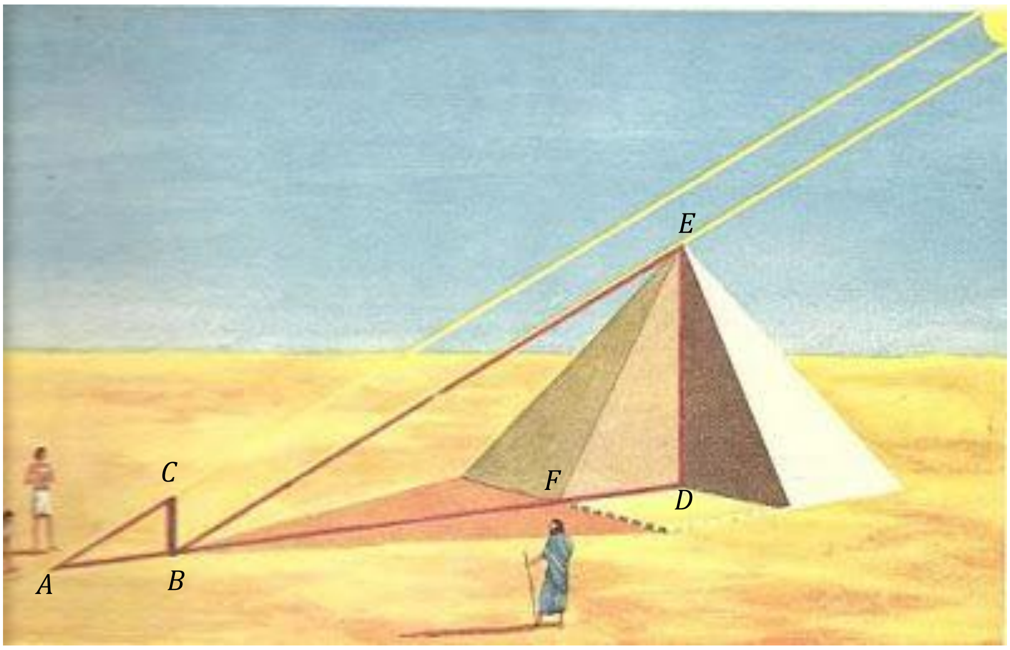
 ANO LETIVO 2018/2019 Fevereiro 2019	**COLÉGIO MILITAR** **Matemática- 9º Ano** **Ficha de trabalho n.º 10** Assunto: Semelhança de triângulos **NOME:** ________________________________ **N.º** ______**TURMA:**____

MOTIVAÇÃO

Segundo se diz, foi Tales de Mileto (646-546 a.C.) quem primeiro calculou a altura das pirâmides do Egipto, utilizando o método da sombra, ou seja, fixou uma estaca, **perpendicularmente ao chão**, perto de uma das pirâmides e mediu o comprimento da sombra da estaca nesse preciso momento. Assim, os raios solares formam com a estaca e sua sombra um triângulo, tal e qual como a pirâmide e a sua sombra.

Da física sabemos que quando o Sol incide num determinado local numa hora específica do dia, o seu ângulo de incidência é igual para todos os objetos desse local, nessa hora.

Observa a figura abaixo, constituída por dois triângulos $[ABC]$ e $[BDE]$, onde se ilustra a situação.



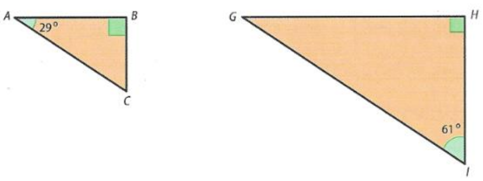
Sabe-se que:

- $\overline{BC} = 2m$; $\overline{AB} = 6m$; $\overline{BF} = 329m$; $\overline{FD} = 115m$;
- $B\hat{A}C \equiv D\hat{B}E$.

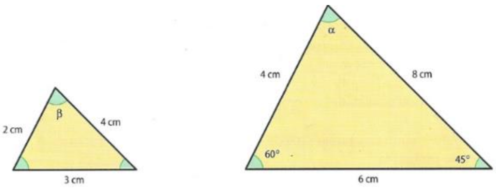
Qual é a altura da pirâmide? Apresenta todos os cálculos e justificações que achares necessários.

1. Mostra que os seguintes pares de triângulos são semelhantes:

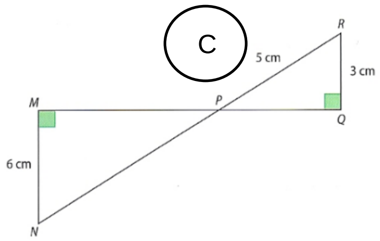
A



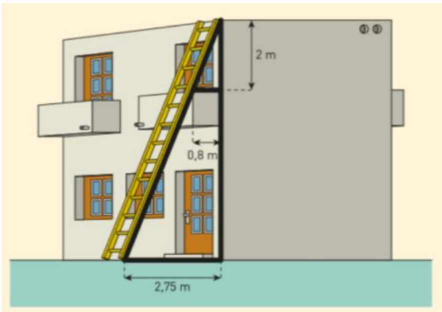
B



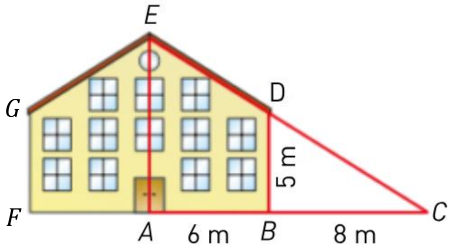
C



2. Atendendo aos dados da figura determina a altura da seguinte casa, apresentando o resultado, em metros, arredondado às décimas.



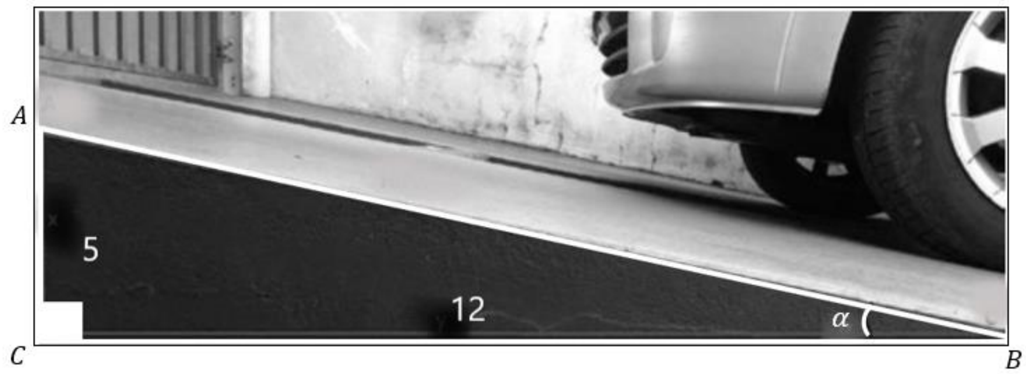
3. (TPC) Na figura está representada a frente de uma casa $[FGEDB]$, sendo AE um eixo de simetria. Atendendo aos dados da figura, determina, em metros quadrados, a área da frente da casa.



Anexo 2: Ficha de trabalho n.º 11

ANO LETIVO **2018/2019** Fevereiro 2019	**COLÉGIO MILITAR** **Matemática- 9º Ano** **Ficha de trabalho n.º 11** Assunto: Razões Trigonométricas **NOME:** ________________________________ **N.º** ______**TURMA:**____

1. Considera a seguinte imagem, onde está representado o triângulo $[ABC]$:



Efetua os seguintes quocientes:

i. $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$;

ii. $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$;

iii. $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$.

a) O que representam:

i. $\overline{AC}$ em relação ao ângulo α no triângulo $[ABC]$;

ii. $\overline{BC}$ em relação ao ângulo α nos triângulos $[ABC]$;

iii. $\overline{AB}$ em relação ao triângulo $[ABC]$.

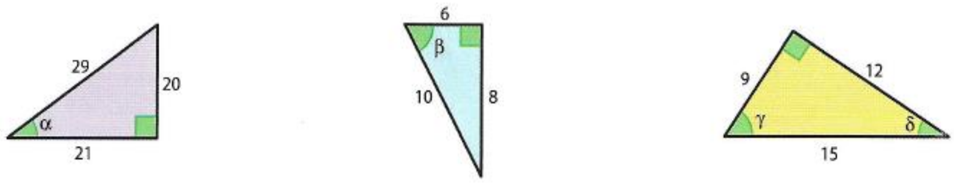
b) Tendo em conta o triângulo $[ABC]$ e as duas últimas questões, completa:

i. $$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{medida\ do\ comprimento\ \ do\ cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ \alpha}{hipotenusaa} =$$

ii. $$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{medida\ do\ comprimento\ \ do\ cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ alfa}{m} =$$

iii. $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{medida\ do\ comprimento\ \ do\ cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ alfa}{m} =$

2. Na figura estão representados três triângulos retângulos.



Atendendo aos dados das figuras, determina os valores de:

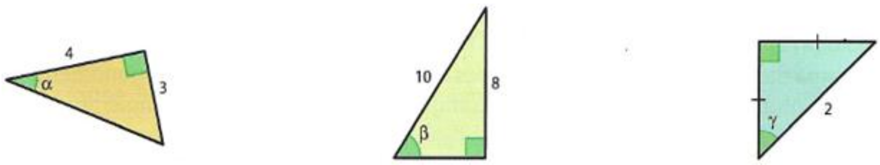
a) $sen\alpha, cos\alpha$ e $tg\alpha$

b) $sen\beta, cos\beta$ e $tg\beta$

c) $sen\gamma, cos\gamma$ e $tg\gamma$

d) $sen\delta, cos\delta$ e $tg\delta$

3. Observa as figuras



Atendendo às medidas indicadas, determina os valores de:

a) $sen\alpha, cos\alpha$ e $tg\alpha$

b) $sen\beta, cos\beta$ e $tg\beta$

c) $sen\gamma, cos\gamma$ e $tg\gamma$

Anexo 3: Ficha de trabalho n. 12

ANO LETIVO **2018/2019** Fevereiro 2019	**COLÉGIO MILITAR** **Matemática- 9º Ano** **Ficha de trabalho n.º 12** Assunto: Invariância nas razões trigonométricas **NOME: ________________________________ N.º _______TURMA:_____**

Para realizares esta ficha, utiliza o tablet e o ficheiro do GeoGebra que te foi disponibilizado.

1. Utilizando as potencialidades do programa e depois de escolheres dimensões para o teu triângulo, identifica:

1.1. O valor do ângulo $B\hat{A}C$.

1.2. As razões trigonométricas:

1.2.1. $sen\ \alpha$

1.2.2. $cos\ \alpha$

1.2.3. $tg\ \alpha$

2. Movimenta, agora, o ponto C. Repara que obténs novos triângulos retângulos.

2.1. Compara o valor do ângulo $B\hat{A}C$ com o valor que registaste na pergunta 1.1. O que verificas?

2.2. O que parece acontecer aos valores das razões trigonométricas?

2.3. O valor encontrado para cada razão depende das medidas dos ângulos dos triângulos considerados? Explica o teu raciocínio.

3. Agora, movimentando o ponto B, responde às seguintes perguntas:

3.1. Compara o valor do ângulo $B\hat{A}C$ com o valor que registaste na pergunta 1.1. O que verificas?

3.2. Os triângulos obtidos são semelhantes ao inicialmente construído? Explica o teu raciocínio.

3.3. Compara os valores das razões trigonométricas obtidas em 1.2. com os valores obtidos após a movimentação do ponto B. O que verificas?

3.4. O valor encontrado para cada razão depende das medidas dos lados dos triângulos considerados? Explica o teu raciocínio.

4. Agora, movimentando qualquer um dos pontos do triângulo, responde às seguintes perguntas:

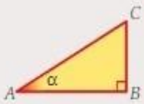
4.1. Consegues apresentar uma situação em que o $sen\ \alpha$ seja negativo? E que tome o valor 1,5? Justifica.

4.2. Entre que valores pode estar o $sen\ \alpha$? E o $cos\ \alpha$?

Anexo 4: Atividade 6 e Exercício 7 da página 47

6 Atividade **Justificar**

Considera um triângulo $[ABC]$ retângulo em B e designa o ângulo interno com vértice em A por α, como sugere a figura.



Justifica que o seno de α e o cosseno de α são números positivos, menores do que 1.

Caderno de Apoio às Metas

7 Considera o triângulo $[ABC]$, retângulo em B, representado na atividade 6.

a) Utilizando as letras da figura, completa:

$\text{tg } \alpha =$?

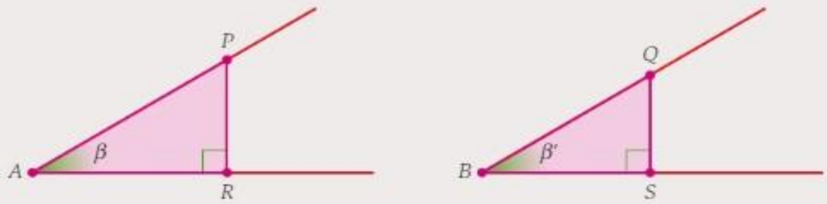
b) Completa:

- $0 < \text{tg } \alpha < 1$ quando $\overline{BC} < \overline{AB}$.
- $\text{tg } \alpha = 1$ quando ?
- $\text{tg } \alpha > 1$ quando ?

Anexo 5: Atividade 5 da página 47

5 Atividade **Demonstrar**

Considera dois ângulos β e β' de vértices A e B com a mesma amplitude ($\hat{\beta} = \hat{\beta}'$) e os triângulos $[ARP]$ e $[BSQ]$ retângulos em R e S, respetivamente.



Prova que:

a) se $\hat{\beta} = \hat{\beta}'$, então $\text{sen } \beta = \text{sen } \beta'$.

b) se $\hat{\beta} = \hat{\beta}'$, então $\cos \beta = \cos \beta'$.

c) se $\hat{\beta} = \hat{\beta}'$, então $\text{tg } \beta = \text{tg } \beta'$.

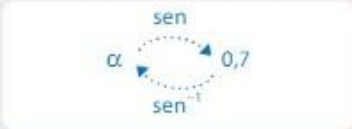
Anexo 6: Atividade 8 da página 48

8 Atividade **Utilizar a calculadora**

8.1 Determina, arredondado às centésimas:

a) sen 35º

b) o ângulo α, cujo seno é 0,7.



	Determinar sen 35º	Determinar o ângulo agudo α cujo seno é 0,7
Pressiona	SIN 3 5 = (ou, nalgumas calculadoras, 35 sin)	SIN^{-1} 0 · 7 =
Visor	.5735764364	44.427004

Observação: Consulta o manual de instruções da tua calculadora:

- para te assegurares que a calculadora está em MODO GRAU.
- para saber qual é a combinação de teclas que tens de pressionar para obter SIN^{-1}.

As teclas mais frequentes são: SHIFT SIN, 2nd SIN ou INV SIN.

a) sen 35º $\approx$ 0,57 **b)** $\alpha \approx 44{,}43º$

8.2 Determina com a calculadora o valor arredondado às milésimas de:

a) sen 64º **b)** cos 73º **c)** tg 21,3º

d) sen 45º **e)** cos 60º **f)** tg 30,8º

8.3 Determina o valor de α, arredondado às décimas, tal que:

a) sen $\alpha = 0{,}531$ **b)** cos $\alpha = \frac{3}{7}$ **c)** tg $\alpha = 3{,}4$

d) sen $\alpha = 0{,}001$ **e)** cos $\alpha = 0{,}84$ **f)** tg $\alpha = 10\,000$

Anexo 7: Exercício 9 da página 48

9 Consulta a tabela de valores naturais que se encontra na página 144 da Parte 3 do teu manual.

9.1 Indica o valor aproximado às milésimas de:

a) sen 85º

b) tg 63º

c) cos 21º

9.2 Indica um valor aproximado às unidades do ângulo α, tal que:

a) tg $\alpha = 0{,}869$

b) sen $\alpha = 0{,}210$

c) cos $\alpha = 0{,}377$

Anexo 8: Atividade 10 da página 49

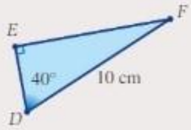
10 Atividade **Calcular elementos de um triângulo retângulo**

10.1 Calcular um cateto, conhecidos um ângulo e a hipotenusa

$[DEF]$ é um triângulo retângulo em E, tal que:

$$\hat{D} = 40^\circ \quad \text{e} \quad \overline{DF} = 10 \text{ cm}$$

Calcula $\overline{EF}$, arredondado às décimas.



Resolução:

$$\text{sen } 40^\circ = \frac{\overline{EF}}{\overline{DF}} \Leftrightarrow \text{sen } 40^\circ = \frac{\overline{EF}}{10}$$

$$\Leftrightarrow 10 \times \text{sen } 40^\circ = \overline{EF}$$

Utilizando a calculadora, obtém-se:

```
10*sin(40)
6.427876097
```

Logo, $\overline{EF} \approx 6{,}4$ (arredondado às décimas).

R.: $\overline{EF} \approx 6{,}4$ cm

Quais são os dados do problema
A amplitude do ângulo agudo D:
O comprimento da hipotenusa: 10

O que queremos determinar?
O comprimento do cateto oposto a

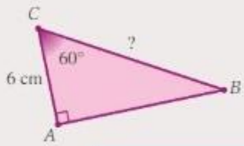
Interroga-te:
Qual é a razão trigonométrica que
oposto ao ângulo dado com a hipo

10.2 Calcular a hipotenusa, conhecidos um ângulo e um cateto

$[ABC]$ é um triângulo retângulo em A, tal que:

$$\overline{AC} = 6 \text{ cm} \quad \text{e} \quad \hat{C} = 60^\circ$$

Calcula $\overline{BC}$.



Copia e completa a resolução.

$$\cos 60^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \cos 60^\circ = \frac{\boxed{?}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} \times \boxed{?} = \boxed{?}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{\boxed{?}}{\boxed{?}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \boxed{?}$$

R.: ?

Quais são os dados
A amplitude do ângu
O comprimento do c

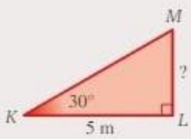
O que queremos de
O comprimento da h

Interroga-te:

10.3 Calcular um cateto, conhecidos um ângulo e o outro cateto

$[KLM]$ é um triângulo retângulo em L, tal que:

$$\hat{K} = 30^\circ \quad \text{e} \quad \overline{KL} = 5 \text{ m}$$



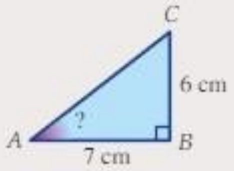
Calcula $\overline{ML}$, arredondado às centésimas.

Sugestão:
Começa por responder às questões:
- Quais são os dados do problema?
- O que queres determinar?
- Qual é a razão trigonométrica que relaciona o cateto oposto ao ângulo dado com o cateto adjacente?

10.4 Calcular os ângulos de um triângulo, conhecidos dois dos seus lados

$[ABC]$ é um triângulo retângulo em B, tal que:

$\overline{AB} = 7$ cm e $\overline{BC} = 6$ cm



a) Calcula os valores de $\hat{A}$ e de $\hat{C}$, arredondados às décimas.

No triângulo retângulo $[ABC]$:

$\text{tg}\,\hat{A} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \text{tg}\,\hat{A} = \frac{6}{7}$

Para determinar o ângulo agudo cuja tangente é $\frac{6}{7}$, usando a calculadora, obtém-se no visor:

tan⁻¹(6/7)
40.60129465

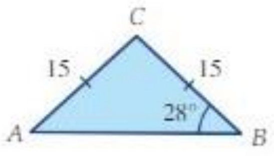
Logo, $\hat{A} \approx 40{,}6°$ e $\hat{C} = 90° - \hat{A} \approx 90° - 40{,}6° = 49{,}4°$.

b) Calcula $\overline{AC}$ por dois processos diferentes: utilizando o teorema de Pitágoras e utilizando os conhecimentos de trigonometria.

Apresenta o resultado arredondado às décimas.

Anexo 9: Exercício 13 da página 50

13 $[ABC]$ é um triângulo isósceles.

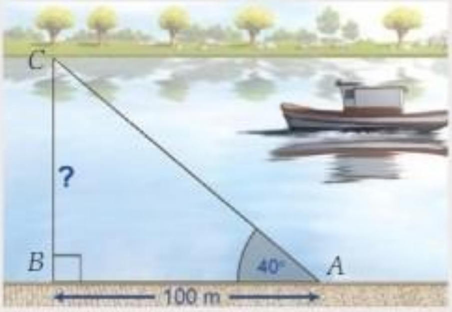


As medidas estão em centímetros.
Determina $\overline{AB}$, arredondado às décimas, e as amplitudes dos ângulos A e C.

Anexo 10: Atividade 14 da página 51

14 Atividade **Resolver problemas**

14.1 Atendendo aos dados da figura, calcula um valor arredondado às unidades da largura do rio no local assinalado.



14.2 Quando o avião que vês na figura levanta voo, faz um ângulo de 20° com a linha do solo. Em 5 segundos percorre 400 metros.

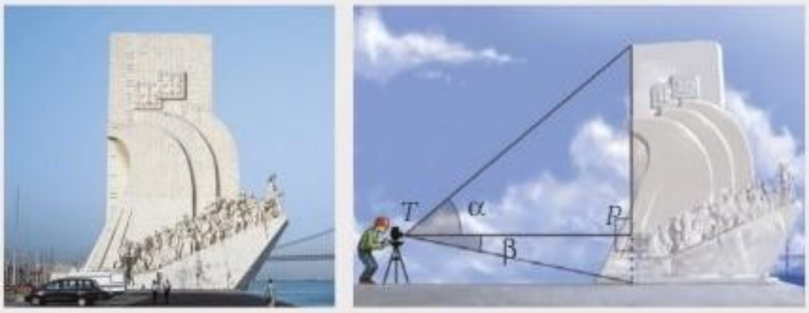
a) Que altura atinge ao fim deste tempo? Apresenta o resultado arredondado às décimas.

b) Qual é o valor, arredondado às décimas, da distância d?

14.3 Depois de teres determinado a altura a, recorrendo à trigonometria, também podes determinar d pelo teorema de Pitágoras. Experimenta. Apresenta o resultado arredondado às décimas.

14.4 Qual é a altura do Padrão dos Descobrimentos?

A figura representa o Padrão dos Descobrimentos, em Lisboa.



Foi necessário medir a sua altura. Para isso, utilizou-se um teodolito. Registaram-se as medidas seguintes, de acordo com o esquema da figura:

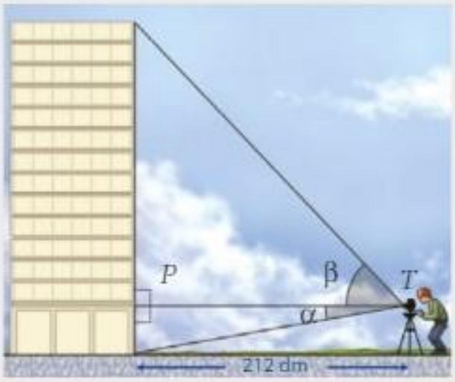
$$\alpha = 39^\circ; \quad \beta = 9^\circ \quad \text{e} \quad \overline{PT} = 60 \text{ m}$$

Determina a altura do Padrão, com aproximação às centésimas.

Adaptado de Exame Nacional

14.5 Qual é a altura do edifício?

Para medir a altura do edifício utilizou-se um teodolito.



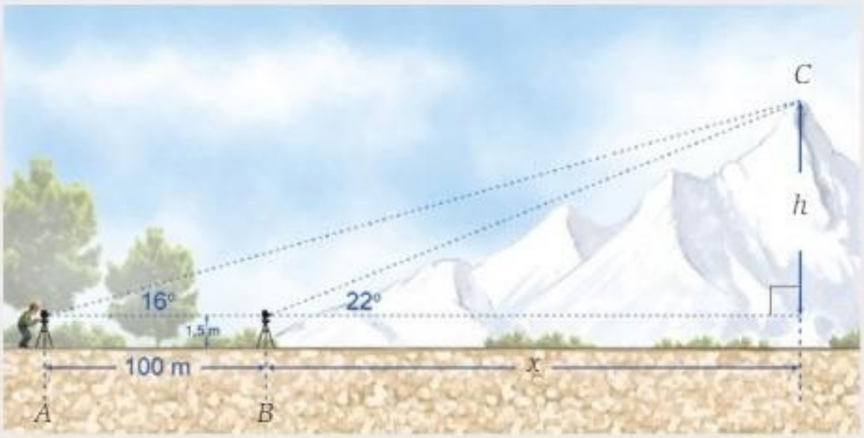
Registaram-se as medidas seguintes, conforme o esquema da figura.

- $\alpha \approx 16{,}5^\circ$
- $\beta = 58{,}8^\circ$
- Distância do edifício ao teodolito: 212 dm

Qual é a altura aproximada do edifício?

Apresenta o resultado arredondado às décimas.

14.6 Como medir a altura de uma montanha quando não se tem acesso à sua base?



Para medir a altura do cume C da montanha representada na figura, um topógrafo escolheu dois pontos A e B, do mesmo plano horizontal.

Com um teodolito, mediu os ângulos de elevação em A e B.

Atendendo aos dados da figura, e tomando valores arredondados às milésimas para as razões trigonométricas, calcula:

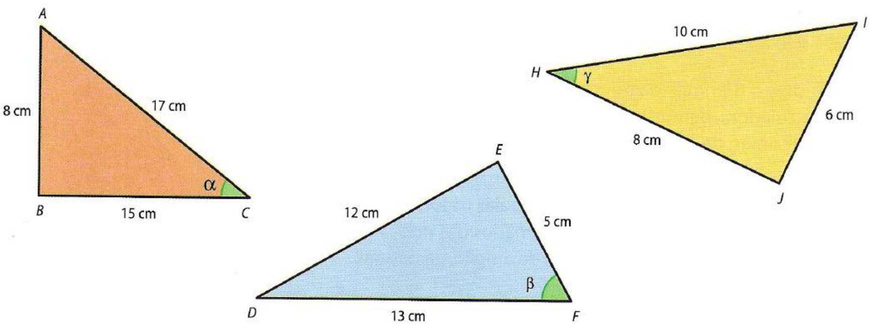
a) a altura da montanha relativamente ao nível do solo.

b) a altura da montanha em relação ao nível do mar, sabendo que os pontos A e B estão a 700 metros de altitude.

Anexo 11: Ficha de trabalho n.º 13

ANO LETIVO **2018/2019** Março 2019	**COLÉGIO MILITAR** **Matemática- 9º Ano** **Ficha de trabalho n.º 13** Assunto: Fórmula Fundamental da Trigonometria **NOME:** ________________________________ **N.º** ______**TURMA:** ____

Na figura seguinte estão representados três triângulos e os comprimentos dos seus lados.



a) Mostra que os triângulos da figura são retângulos.

b) Determina as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de cada um dos ângulos assinalados na figura. Compara o valor da razão tangente com o quociente entre as razões seno e cosseno de cada ângulo. O que verificas?

c) Para cada ângulo assinalado na figura, determina o valor de $(sen\alpha)^2 + (cos\alpha)^2$. O que verificas?

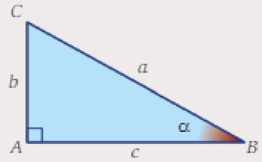
d) Será que aquilo que observaste funciona para qualquer triângulo? Realiza a atividade 29 da página 55 do manual.

Anexo 12: Atividade 29 da página 55

29 Atividade **Demonstrar**

O triângulo $[ABC]$ representa um triângulo retângulo em A.

- α designa um dos seus ângulos agudos.
- a, b e c representam as medidas dos lados.



a) Copia e completa a demonstração de que qualquer que seja o ângulo agudo α considerado se tem sempre: $\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$\text{sen}\,\alpha = \boxed{?}$; $\cos\alpha = \boxed{?}$	Por definição de seno e de cosseno de um ângulo agudo.
$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = \boxed{?} + \boxed{?}$	Substituindo $\text{sen}\,\alpha$ e $\cos\alpha$ pelas expressões já escritas.
$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = \dfrac{\boxed{?} + \boxed{?}}{\boxed{?}}$	Adicionando as duas frações.
$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = \dfrac{\boxed{?}}{\boxed{?}}$	Aplicando o teorema de Pitágoras.
$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$	Como queríamos provar.

b) Prova, aplicando a definição das razões trigonométricas, que qualquer que seja o ângulo agudo α considerado se tem sempre: $\dfrac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha$.

Anexo 13: Exercício 31 da página 56

31 Sendo $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$ e α um ângulo agudo, calcula o valor exato de:

a) $\text{sen}\,\alpha$

b) $\text{tg}\,\alpha$

Anexo 14: Exercício 43 da página 58

43 **Já consigo fazer demonstrações**

Prova que:

a) $(\text{sen}\,\beta + \cos\beta)^2 + (\text{sen}\,\beta - \cos\beta)^2 = 2$

b) $1 + \text{tg}^2\,\beta = \dfrac{1}{\cos^2\beta}$

Anexo 15: Exercício 32 da página 57

32

32.1 O ângulo α é agudo e sen $\alpha = 0{,}86$.

Calcula, utilizando a calculadora:

a) α arredondado às unidades.

b) cos α, arredondado às décimas.

c) tg α, arredondado às décimas.

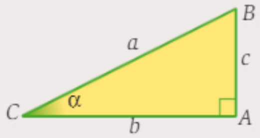
32.2 Sendo $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, determina:

a) sen α, calculando primeiro α. Apresenta os resultados arredondados às décimas.

b) o valor exato de sen α.

Anexo 16: Atividade 44 da página 59

44 Atividade **À descoberta da relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares**



Na figura, está representado um triângulo $[ABC]$ retângulo em A. Designa:

- a amplitude do ângulo ACB por α.
- as medidas dos lados do triângulo por a, b e c, como sugere a figura.

44.1 Justifica que os ângulos B e C são complementares.

44.2 Se o ângulo ACB tem de amplitude α, qual é a amplitude do ângulo ABC?

44.3 Escreve as seguintes razões trigonométricas na forma de razões entre comprimentos dos lados do triângulo $[ABC]$.

sen $\alpha = \frac{c}{a}$ sen $(90° - \alpha) =$ **?**

cos $\alpha =$ **?** cos $(90° - \alpha) =$ **?**

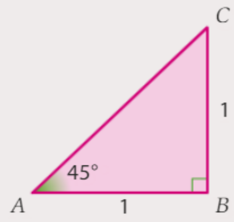
44.4 Observa os resultados obtidos na alínea anterior.

Que relação podes estabelecer entre os resultados obtidos para o seno e o cosseno de ângulos complementares?

45 Atividade

Valores exatos das razões trigonométricas de um ângulo de 45°

Pretendemos determinar, sem auxílio da calculadora, os valores exatos de sen 45°, cos 45° e tan 45°.



A figura representa o triângulo $[ABC]$, retângulo em B, tal que o ângulo BAC tem de amplitude 45° e $\overline{AB} = 1$.

a) Mostra que $\overline{BC} = 1$ e que $\overline{AC} = \sqrt{2}$.

b) Justifica a afirmação:

Os ângulos agudos de um triângulo retângulo isósceles medem ambos 45°.

c) Determina os valores exatos de sen 45°, cos 45° e tg 45°.

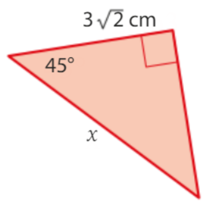
Anexo 18: Ficha de trabalho n.º 13A

ANO LETIVO **2018/2019** Março 2019	**COLÉGIO MILITAR** **Matemática- 9º Ano** **Ficha de trabalho n.º 13A** Assunto: Resolução de exercícios e problemas **NOME:** ________________________________ **N.º** ______**TURMA:** _____

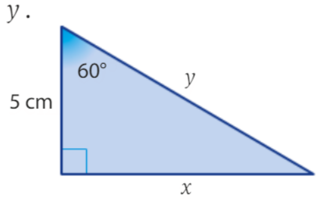
1. Resolve, no espaço seguinte, o exercício 74 da página 66 do manual.

74 Nas figuras seguintes, estão representados triângulos retângulos.

a) Atendendo aos dados da figura, determina por dois processos diferentes o valor exato de x.



b) Atendendo aos dados da figura, determina os valores exatos de x e y.



2. Resolve, no espaço seguinte, o exercício 34 da página 58 do manual.

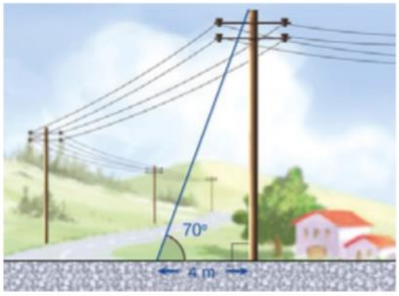
34 $[KLM]$ é um triângulo retângulo em K.

Sabe-se que $\text{sen}\,\hat{L} = \frac{21}{29}$.

Calcula os valores exatos de $\cos\hat{L}$ e de $\text{tg}\,\hat{L}$.

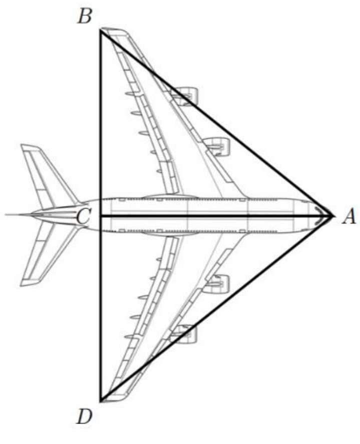
3. Resolve, no espaço seguinte, o exercício 62 da página 65 do manual.

62 A altura do poste



Calcula o valor aproximado da altura do poste, arredondado às unidades.

4. Na figura ao lado, está representado um esquema do modelo de avião A380, um dos maiores aviões de transporte de passageiros do mundo. Na figura estão também representados o triângulo isósceles [ABD] e o segmento de reta [AC], que é a altura do triângulo relativa à base [BD]. O esquema não está desenhado à escala. Sabe-se que:



Prova Final 3º Ciclo – 2016, 2ª fase

- $\overline{AB} = \overline{AD}$;
- $\overline{AB} = 51\ m$;
- $B\hat{A}D = 76°$.

Determina $\overline{BD}$, ou seja, determina a envergadura do A380.

Apresenta o resultado em metros, arredondado às unidades. Sempre que, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, duas casas decimais. Mostra como chegaste à tua resposta.

ANO LETIVO

2018/2019

Março 2019

COLÉGIO MILITAR

Matemática- 9º Ano

Ficha de trabalho n.º 14

Assunto: Resolução de problemas

NOME: ______________________________ **N.º** ______**TURMA:** ____

1. A figura ao lado é uma fotografia do farol do Cabo de Santa Maria, situado na Ria Formosa, na Ilha de Culatra.

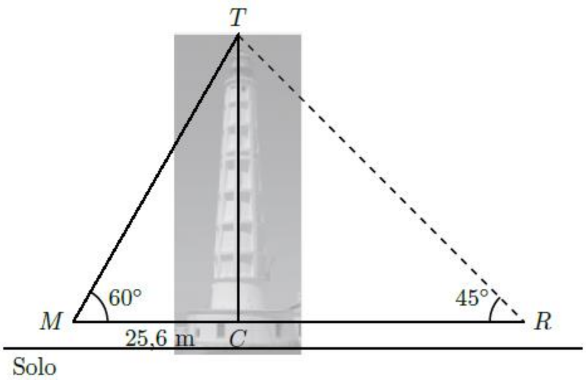
A Marta e o Rui estão a fazer um trabalho de trigonometria.

A Marta colocou-se num ponto a partir do qual podia observar o topo do farol segundo um ângulo de amplitude de 60°. Fez algumas medições e esboçou um esquema idêntico ao que se apresenta na figura seguinte.

Nesse esquema, o ponto T corresponde ao topo do farol, o ponto M corresponde ao ponto de observação da Marta, e o ponto R corresponde ao ponto de observação do Rui.

Relativamente ao esquema da figura ao lado (que não está desenhada à escala), sabe-se que:

- $[MCT]$ é um triângulo retângulo;
- O ponto R pertence à semirreta $\dot{M}C$;
- $T\widehat{M}C = 60°$ e $T\widehat{R}C = 45°$;
- $\overline{MC} = 25{,}6\ m$



Determina $\overline{MR}$, ou seja, determina a distância entre a Marta e o Rui. Apresenta o resultado em metros, arredondado às unidades.[3]

Sugestão: Começa por determinar $\overline{TC}$.

Sempre que, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, duas casas decimais. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

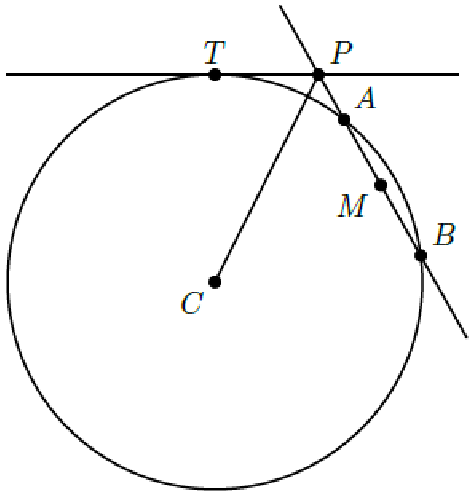
Prova Final 3.º Ciclo – 2016, 1ª fase

[1] Solução: $\overline{MR} \approx 70\ metros$

2. Na figura ao lado, estão representados uma circunferência de centro no ponto C e os pontos T, P, A, M e B.

A figura não está desenhada à escala.

Sabe-se que:



- Os pontos T, A e B pertencem à circunferência;
- M é o ponto médio do segmento de reta $[AB]$
- A reta tangente à circunferência no ponto T interseta a reta AB no ponto P.
- $\overline{PB} = 8$
- $\overline{PA} = 2$
- $\overline{PT} = 4$
- $\overline{CT} = 9{,}2$

Determina a amplitude do ângulo BCM.[4]

Na tua resposta, deves:

- Obter $\overline{BM}$
- Indicar o valor de $\overline{CB}$
- Apresentar a amplitude do ângulo BCM, em graus, arredondada às unidades.

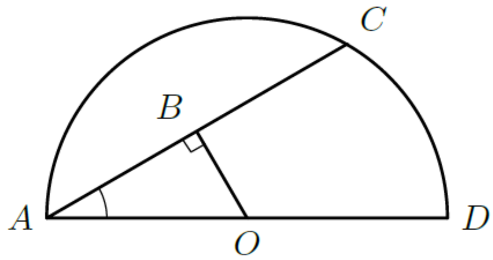
Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Sempre que, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo, três casas decimais.

Prova Final 3.º Ciclo – 2015, Época Especial

3. Na figura seguinte, está representada uma semicircunferência de centro no ponto O e diâmetro $[AD]$.

Sabe-se que:



- O ponto C pertence à semicircunferência;
- O ponto B pertence ao segmento de reta $[AC]$;
- O triângulo $[ABO]$ é retângulo em B;
- $\overline{OB} = 1\ cm$;

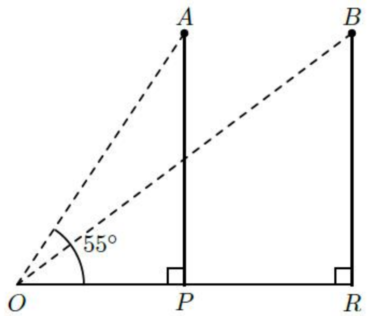
[2] Solução: $B\hat{C}M \approx 19°$

- $B\hat{A}O = 25°$

Determina a área do semicírculo de diâmetro $[AD]$.[5]
Apresenta o resultado em centímetros quadrados, arredondado às décimas.
Sempre que, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo três casas decimais. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Prova Final 3.º Ciclo – 2015, 2ª fase

4. Em São Torpes, no concelho de Sines, encontra-se uma central termoelétrica com duas chaminés.
A figura da esquerda é uma fotografia dessa central



termoelétrica e a figura da direta é uma representação das duas chaminés.
Na figura da direita, os segmentos de reta $[AP]$ e $[BR]$ correspondem às duas chaminés. O ponto O corresponde a uma posição a partir da qual se observa o topo da chaminé representada por $[AP]$ segundo um ângulo com $55°$ de amplitude.
Ambas as chaminés têm $225\ metros$ de altura e a distância entre elas é igual a 132 metros.
Assim, relativamente à figura da direita (que não está desenhada à escala), sabe-se que:
- O ponto P pertence ao segmento de reta $[OR]$;
- $A\hat{O}P = 55°$;
- $\overline{AP} = \overline{BR} = 225\ m$
- $\overline{PR} = 132\ m$

Determina a amplitude do ângulo BOR.[6]
Sugestão: Começa por determinar $\overline{OP}$.
Apresenta o resultado em graus, arredondado às unidades.
Sempre que, em cálculos intermédios, procederes a arredondamentos, conserva, no mínimo duas casas decimais. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Prova Final 3.º Ciclo – 2016, Época Especial

---

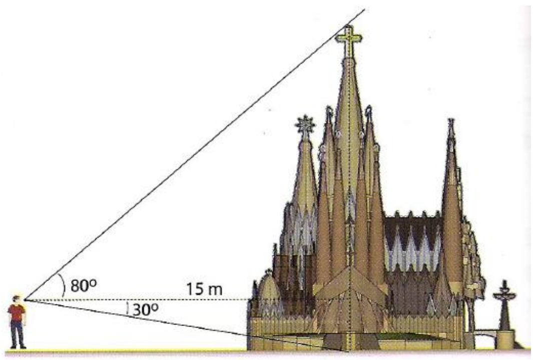
[3] Solução: $A_S = 8{,}8\ cm^2$
[4] Solução: $B\hat{O}R \approx 38°$

Anexo 20: Ficha de trabalho n.º 15

ANO LETIVO **2018/2019** Março 2019	**COLÉGIO MILITAR** **Matemática- 9º Ano** **Ficha de trabalho n.º 15** Assunto: Resolução de Problemas na Trigonometria **NOME: ___________________________________ N.º _______TURMA:_____**

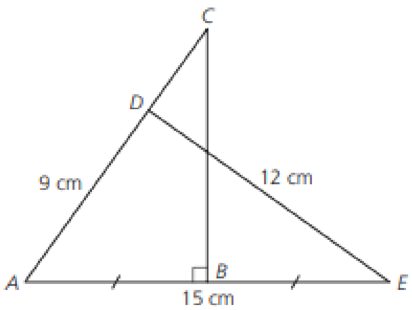
1. Sabendo que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e que α é um ângulo agudo, determina o valor exato de:
   a) $1 + tg^2\alpha$
   b) $2sen\ \alpha - tg\ \alpha$

2. O Templo Expiatório da Sagrada Família de Barcelona começou a ser construído a 19 de março de 1882 e ainda hoje se encontra inacabado. Aquando da sua visita a Barcelona, o Pedro ficou impressionado com a arquitetura desta obra da autoria do catalão Antoni Gaudí. Atendendo aos dados da figura, determina a altura (em metros), com aproximação às unidades, da torre da catedral que se encontra em destaque no esquema ao lado.

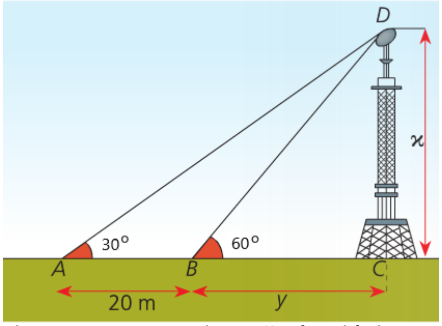


3. Sobre a figura ao lado (que não está desenhada à escala), sabe-se que:
   - é um triângulo retângulo em B;
   - B é o ponto médio do segmento de reta $[AE]$;
   - , $\overline{DE} = 12\ cm$ e $\overline{AE} = 15\ cm$.

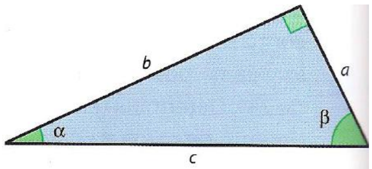
   a. Prova que $[ADE]$ é retângulo em D.
   b. Justifica que $\cos\widehat{A} = sen\ \widehat{E}$.
   c. Determina, com a aproximação às décimas, a amplitude do ângulo A.
   d. Determina, com a aproximação às milésimas, $\overline{DC}$.



4. O funcionamento de um telemóvel é baseado numa comunicação em dois sentidos entre o aparelho e uma antena colocada no topo de uma estação base.
Para determinar a altura (x) de uma estação base, o Jaime mediu a amplitude de dois ângulos em dois pontos, A e B, que distam $20\ metros$ entre si. Determina a altura da estação base com aproximação às décimas. Nos cálculos intermédios utiliza sempre os valores exatos.

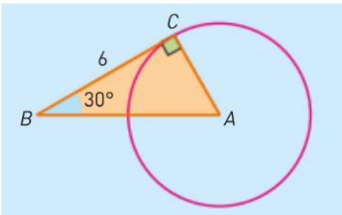


5. Na figura está representado um triângulo retângulo, em que a, b e c designam, respetivamente, as medidas dos catetos e da hipotenusa. Prova que o valor de $cos\alpha \times sen\beta + sen\alpha \times cos\beta$ é 1.



6. Durante uma prova de orientação, os participantes partem de um ponto B e percorrem um trajeto em forma de triângulo, $[ABD]$, conforme se pode ver no mapa que se segue. Qual é a distância percorrida nesse trajeto triangular com aproximação às décimas.

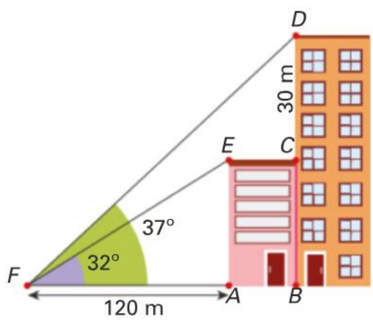
7. Na figura está representada uma circunferência de centro A e que passa por C.
Sabe-se ainda que $A\hat{B}C = 30°$ e $\overline{BC} = 6$. Determina o perímetro da circunferência. Apresenta o resultado arredondado às centésimas.



8. Para qualquer ângulo agudo de amplitude α, prova que é válida a relação seguinte:

$$\frac{sen\alpha \times cos\alpha}{tg\alpha} + sen^2\alpha = 1$$

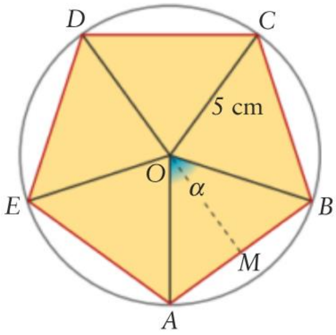
9. Dois prédios contíguos têm alturas diferentes, como observamos na figura ao lado.
Sabe-se que:
- $[ABCE]$ é um retângulo;
- $[DB] \perp [EC]$
- $\overline{AF} = 120\ m$
- $A\hat{F}E = 32°$



- $B\hat{F}D = 37°$
- $\overline{CD} = 30\ m$

De acordo com os dados da figura, determina $\overline{EC}$. Apresenta a resposta em metros, arredondada às unidades.

10. Na figura ao lado está representado um pentágono regular $[ABCDE]$ inscrito numa circunferência de centro O e raio $5\ cm$.



a) Qual é a amplitude do ângulo AOB?

b) $[OM]$ é a altura do triângulo $[ABO]$ relativamente à base $[AB]$.

Determina a medida do lado do pentágono regular.

Apresenta o resultado com uma casa decimal.

c) Qual é a área do pentágono regular?

Nos cálculos intermédios utiliza quatro casas decimais

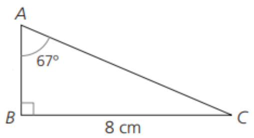
Apresenta o resultado com aproximação às décimas.

Soluções: 1a) 2; 1b) $\sqrt{2} - 1$; 2) $\approx 94\ m$; 3c) $\approx 53{,}1°$; 3d) $3{,}500\ cm$; 4) $\approx 17{,}3\ m$; 6) $\approx 890{,}7\ m$; 7) $\approx 21{,}77\ u.m.$; 9) $\approx 19\ m$; 10a) $72°$; 10b) $\approx 5{,}9\ cm$; 10c) $\approx 59{,}4\ cm^2$

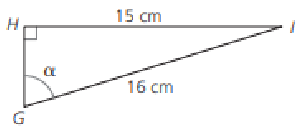
Anexo 21: Questão de aula

 DATA __/__/2019	**COLÉGIO MILITAR** **4ª Questão aula de Matemática - 9º Ano – 25 minutos** **Nome:** ________________________ **TURMA** _____ **Nº**________	Professora *Anabela Anunciada* *Anabela Candeias*

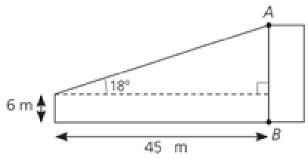
1. Calcule a medida do comprimento do segmento de reta $[AC]$, com aproximação às centésimas.



2. Calcule a amplitude do ângulo α, arredondado às décimas.



3. Determine $\overline{AB}$ com aproximação às centésimas.



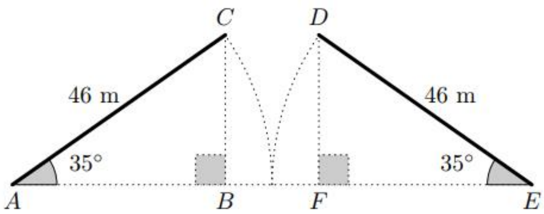
4. Sabendo que α é um ângulo agudo e que $cos\,\alpha = \frac{2}{3}$, determine o valor exato de:

a) $sen\,\alpha$

b) $tg\,\alpha$

5. No Porto de Leixões, existe uma das maiores pontes basculantes do mundo. No esquema da figura seguinte à direita), está representada a posição, em relação à horizontal, que as duas secções móveis da ponte tinham num certo instante. Nesse esquema, as secções móveis estão representadas pelos segmentos de reta $[AC]$ e $[ED]$.


Ponte do Porto de Leixões



Relativamente ao esquema, sabe-se que:

- Os triângulos $[ABC]$ e $[EDF]$ são retângulos nos vértices B e F, respetivamente;
- $\overline{AC} = \overline{ED} = 46\,m$;
- $B\hat{A}C = D\hat{E}F = 35°$;
- $\overline{AE} = \overline{AC} + \overline{ED}$

Determina a distância entre os pontos C e D, na posição representada no esquema da figura da direita.

Apresenta o resultado em metros, arredondado às unidades. Se procederes a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserva, pelo menos, duas casas decimais. Apresenta todos os cálculos que efetuares.
Sugestão: Começa por determinar $\overline{AB}$ ou $\overline{EF}$.

Prova Final 3.º Ciclo – 2018, Época especial

Anexo 22: Teste escrito

ANO LETIVO 2018/19 DATA **25.mar. 2019**	**COLÉGIO MILITAR** **MATEMÁTICA – 9º ANO** **TESTE nº 6 – 90 minutos** **NOME:** ______________________; **TURMA** ____; **Nº**	**Professoras:** *Anabela Anunciada* *Anabela Candeias*

Num triângulo retângulo em que α é um ângulo agudo, qual das seguintes igualdades é verdadeira?

(A) $sen\ \alpha = -0{,}2$ (B) $tg\ \alpha = 1{,}5$ (C) $\cos\alpha = 2$ (D) $sen\ \alpha = 1$

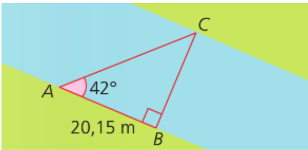
1. Resolve a inequação seguinte:

$$\frac{2(1-x)}{3} < \frac{1}{2}x + 2$$

Apresenta o conjunto solução na forma de um intervalo de números reais.
Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Prova Final 3.º Ciclo – 2018, 1ª fase

2. Na figura está representado um rio e as suas margens. Sabendo que o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B e que $\overline{AB} = 20{,}15\ m$ e $C\hat{A}B = 42°$, determina, com aproximação às centésimas, $\overline{BC}$, ou seja, a largura do rio.



3. Seja $A =]-1{,}2[$ e seja $B =]-3{,}0[$. Em qual das opções seguintes está representado o conjunto $A \cup B$?

(A)

(B) $\{x \in \mathbb{R}: x > -3\ \wedge x < 0\}$

(C) $\{x \in \mathbb{R}: x > -1\ \wedge x < 2\}$

(D) $\{x \in \mathbb{R}: x > -3\ \wedge x < 2\}$

Teste Intermédio 9.º ano – 07.02.2011

4. Considera os conjuntos A, B e C.

$B =]-3,0[$ $C = \{ x \in \mathbb{R} : -2 \leq x \leq 2 \}$

Determina na reta real e na forma de intervalo de números reais:

4.1. $A \cup B$ **4.2.** $A \cap C$

5. Sabendo que $cos\ \alpha = \frac{3}{5}$ e que α é um ângulo agudo, determina o valor exato simplificado de:

$$sin\ \alpha - 2tg\alpha$$

6. A Maria estava a brincar com um balão e este ficou preso num poste. Observa a figura seguinte, onde se verifica que:

$[ABC]$ é triângulo retângulo em A;

$[CDE]$ é triângulo retângulo em D;

$[AC]$ é paralelo a $[DE]$

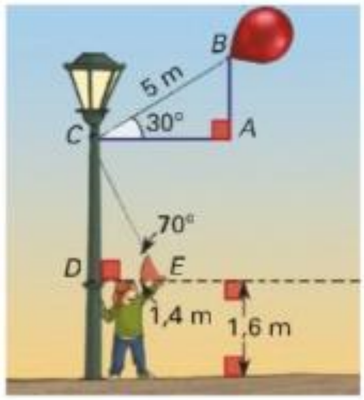
$\overline{CB} = 5\ m$ e $\overline{DE} = 1{,}4\ m$;

$C\hat{E}D = 70°$ e $A\hat{C}B = 30°$

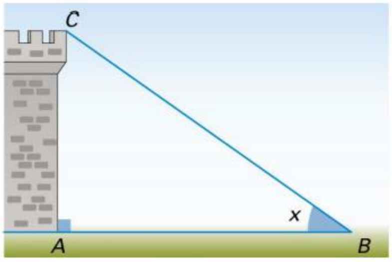
A Maria tem $1{,}6\ metros$ de altura.

Determina a distância do balão, no ponto B, ao solo.

Apresenta a resposta com aproximação às décimas do metro.



7. O cabo está preso no topo de uma torre. A torre tem 16 metros de altura e o cabo tem 22 metros de comprimento. Determina a amplitude do ângulo que o cabo faz com a linha do solo. Apresenta o resultado arredondado à décima do grau.



8. Considera a inequação seguinte:

$$-2x < 6$$

Qual é o conjunto solução desta inequação?

(A) $]-3, +\infty[$ (B) $]-\infty, 3[$ (C) $]3, +\infty[$ (D) $]-\infty, 3[$

Prova Final 3.º Ciclo – 2016, Época especial

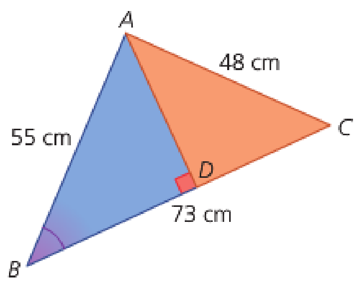
9. Considera o triângulo [ABC], em que:

$\overline{AB} = 55\ cm,\ \overline{AC} = 48\ cm$ e $\overline{BC} = 73\ cm.$

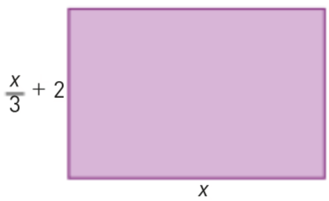
9.1. Mostra que o triângulo [ABC] é retângulo em *A*.

9.2. Determina a amplitude do ângulo *ABC*, arredondado às unidades.

9.3. Determina $\overline{AD}$ (com duas casas decimais).



10. Na figura está representado um retângulo em que um dos lados tem mais 2 unidades que a terça parte do outro lado. Determina os valores que x pode tomar para que o perímetro do retângulo não seja superior a 44.



11. Os alunos da turma da Marta combinaram encontrar-se no Parque das Nações. Cada um deles utilizou apenas um meio de transporte para chegar ao parque. Na tabela que se segue, podes observar os meios de transporte usados e o número de alunos que utilizou cada um deles.

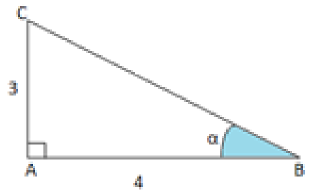
Transporte	Comboio	Metropolitano	Autocarro	Bicicleta
N.º de alunos	9	12	6	3

Escolhendo, ao acaso, um aluno da turma da Marta, qual é a probabilidade de esse aluno **não** ter ido de autocarro?

Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

Exame Nacional 3.º ciclo, 1.ª chamada, 2006

12. Na figura está representado o triângulo [ABC], retângulo em *A*. Qual é a opção correta?



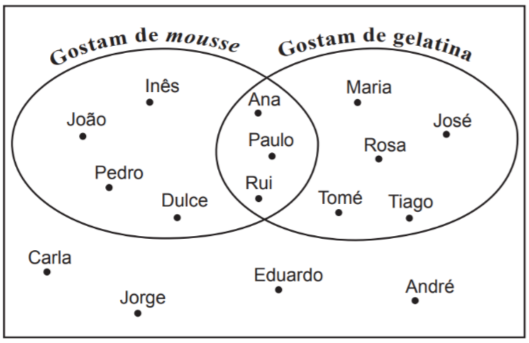
(A) $sen\ \alpha = \frac{4}{5}\ e\ cos\ \alpha = \frac{3}{5}$

(B) $sen\ \alpha = \frac{4}{5}\ e\ tg\ \alpha = \frac{4}{3}$

(C) $tg\ \alpha = \frac{3}{4}\ e\ sen\ \alpha = \frac{3}{5}$

(D) $sen\ \alpha = \frac{5}{3}\ e\ cos\ \alpha = \frac{5}{4}$

13. Na festa de anos do Miguel, perguntou-se aos 16 convidados se gostavam de *mousse* de chocolate e se gostavam de gelatina. No diagrama seguinte, está representada a distribuição dos convidados da festa de anos do Miguel, de acordo com as respostas dadas.

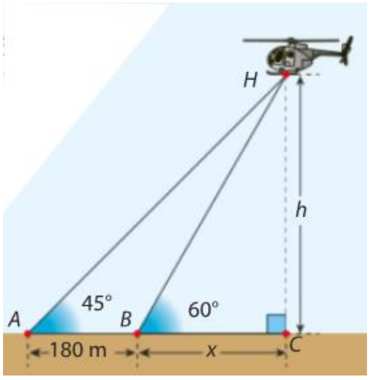


Escolhe-se, ao acaso, um dos convidados que gostam de gelatina. Qual é a probabilidade de esse convidado também gostar de *mousse* de chocolate?

(A) 25% (B) 37,5% (C) 50% (D) 62,5

Prova Final 3.º Ciclo – 2015, Época Especial

14. O helicóptero representado na figura ao lado por H é observado de dois pontos A e B, do solo. Os ângulos de elevação do helicóptero relativamente a A e B são, como se mostra na figura, de $45°$ e $60°$, respetivamente. A distância de A a B é $180\ metros$ e A, B e C pertencem à mesma reta.



Determina a altura, h, arredondada às unidades, a que se encontra o helicóptero do solo. Nos cálculos intermédios usa valores exatos.

15. Prova que a relação seguinte é válida para qualquer ângulo agudo de amplitude α:

$$sen\ \alpha \times cos\alpha \times tg\alpha + cos^2\ \alpha = 1$$

Anexo 23: Plano de aula do dia 14 de fevereiro de 2019

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias
Professoras-estagiárias: Débora Ferrage e Joana Dias

Data: 14/02/2019 Ano: 9.º Turma: B/C Duração: 90 minutos

LIÇÃO N.º: 92 e 93
ALUNOS EM FALTA:
SUMÁRIO:

- Revisões sobre as semelhanças de triângulos.
- Introdução ao estudo da trigonometria.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS: Revisões dos critérios de semelhança de triângulos; definição das razões trigonométricas.
DOMÍNIO: Geometria e Medida 9 (GM 9).
SUBDOMÍNIO: Trigonometria

METODOLOGIA DA AULA: Trabalho autónomo a pares; Discussão e sistematização de ideias em grupo turma.
OBJETIVOS DA AULA: Introduzir as razões trigonométricas.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS: Critérios de semelhança de triângulos; Teorema de Pitágoras.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS:

- Desenvolver a comunicação matemática dos alunos, sendo a comunicação escrita potenciada pelas resoluções que estes apresentam das tarefas propostas e a comunicação oral estimulada através da dinâmica do par onde estão inseridos e das discussões que serão promovidas em grupo turma;
- Desenvolver o raciocínio dedutivo, dado que os alunos irão, por eles próprios, chegar aos resultados pretendidos uma vez que as tarefas propostas apresentam um encadeamento com esse sentido.

RECURSOS:

- Da professora: manual; fichas de trabalho; tabelas de registo (participação e idas ao quadro); apresentação em PowerPoint.
- Do aluno: manual; caderno diário.

MOMENTOS DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. (5 minutos)
   Formação dos grupos.
   Preâmbulo histórico (5 minutos)
2. Ficha 10: "Semelhança de triângulos" (25 minutos)
   i. Resolução; (15 minutos)
   ii. Apresentação da resolução e discussão. (10 minutos)
3. Atividade 1 da página 40 do manual (10 minutos)
   i. Resolução e discussão. (10 minutos)
4. Ficha 11: "Razões trigonométricas" (40 minutos)
   i. Preâmbulo razões trigonométricas (2 minutos)
   ii. Resolução 1ª página; (10 minutos)
   iii. Sistematização das razões trigonométricas; (5 minutos)
   iv. Resolução 2ª página; (13 minutos)
   v. Apresentação da resolução e discussão. (10 minutos)
5. Síntese da aula. (5 minutos)

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. **5 minutos**

Formação dos grupos

Neste momento da aula, a professora irá indicar aos alunos que formem grupos (de dois ou três alunos) e distribuirá os enunciados, relembrando aos alunos que devem fazer a sua resolução na ficha de trabalho e a correção diretamente no caderno diário.

Uma vez que os alunos estão a trabalhar colaborativa e cooperativamente, sempre que possível a professora sugerirá que eles discutam entre si a fim de se entreajudarem. Note-se que a professora não se está a descartar de cumprir o seu papel, mas aproveitará para potenciar o trabalho a pares.

Para esta aula foi preparada uma apresentação em PowerPoint que incluirá os conteúdos em estudo, nomeadamente os que serão abordados na ficha 10 e ficha 11.

Preâmbulo histórico **5 minutos**

A professora irá contextualizar historicamente o conteúdo matemático que será abordado imediatamente de seguida. Serão feitas referências ao matemático grego Tales de Mileto e a algumas das suas contribuições para a ciência, nomeadamente para a Matemática, estabelecendo-se a ligação com o Teorema de Tales (conteúdo a ser utilizado na ficha 10).

De forma a envolver todos os alunos no tópico em questão, a professora irá fazer as seguintes perguntas:

- Quanto acham que mede a pirâmide?
- Que conhecimentos matemáticos terá Tales utilizado para resolver este problema?

Estas perguntas servirão de mote para a resolução da primeira página da ficha 10, sendo que as suas respostas serão dadas à medida que a ficha vai sendo resolvida.

Durante a entrega dos enunciados, a professora dirá que a última tarefa da ficha será para trabalho de casa, que deverá ser feita numa folha à parte para entregar na aula seguinte. Simultaneamente, será entregue aos alunos um pequeno resumo sobre a semelhança de triângulos, que os auxiliará na resolução da ficha. A professora aproveitará o momento para chamar a atenção sobre as notações utilizadas, nomeadamente o símbolo de congruência que é utilizado no âmbito da geometria.

2. Ficha 10: "A semelhança de triângulos" **25 minutos**

i. <u>Resolução</u>: **15 minutos**

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

ii. Apresentação da resolução e discussão **10 minutos**

A seleção dos grupos para ser apresentada a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não hajam grupos voluntários, a professora procederá à escolha.

Exercício Motivação:

Pelos dados do enunciado sabemos que $B\hat{A}C = D\hat{B}E$, e que $E\hat{D}B = 90° = C\hat{B}A$.

Pelo critério AA de semelhança de triângulos, conseguimos garantir que estes dois triângulos são semelhantes, e, portanto, sai a seguinte relação:

$$\frac{2}{6} = \frac{altura\ da\ pirâmide\ (h)}{329 + 115} \Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{h}{444} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times 444 = h \Leftrightarrow h = 148m$$

Portanto, a altura da pirâmide é 148 metros.

Resolução alternativa:

$$\frac{2}{altura\ da\ pirâmide\ (h)} = \frac{6}{329 + 115} \Leftrightarrow \frac{2}{h} = \frac{6}{444} \Leftrightarrow \frac{2 \times 444}{6} = h \Leftrightarrow h = 148m$$

Portanto, a altura da pirâmide é 148 metros.

É importante que a professora refira que as razões de semelhança que permitem relacionar ambos os triângulos podem ser escolhidas de duas formas: o aluno pode relacionar os lados de cada triângulo separadamente, ou então relacionar os lados correspondentes dos dois triângulos.

É preciso é que seja respeitada a ordem pela qual surgem as razões.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em retirar do enunciado todos os dados de que necessita.

O aluno poderá não justificar que os triângulos são semelhantes, escrevendo simplesmente as razões, esquecendo-se do motivo pelo qual estas são válidas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A Professora poderá perguntar: “Que dados temos?”; “Precisamos de justificar alguma coisa?”; “Se sim, ou quê?”; “Que critério de semelhança de triângulos podemos utilizar, tendo em conta os dados que nos dão?”; “O lado AB do triângulo $[ABC]$ corresponde a que lado do triangulo $[BDE]$?” (analogamente para os restantes lados.)

Exercício 1:

Par	**Argumentação**	**Critério**
A	$C\hat{A}B = H\hat{G}I$ e $A\hat{B}C = G\hat{H}I$	AA
B	$\frac{4}{8} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ou $\frac{8}{4} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = 2$	LLL
C	$R\hat{P}Q = M\hat{P}N$ e $N\hat{M}P = R\hat{Q}P$	AA

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em perceber qual o critério que garante a semelhança entre os triângulos pelo facto de não compreender quais os dados apresentados em cada par.

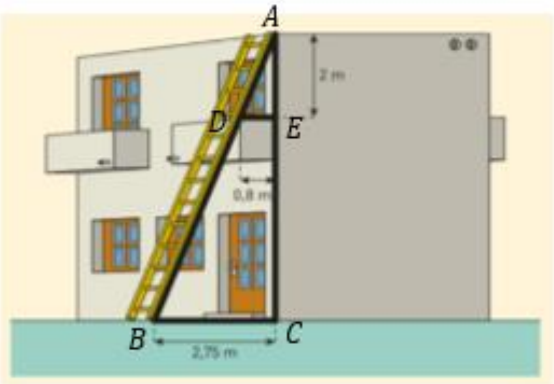
Apoio a eventuais dificuldades:

Caso a dúvida seja do par, a professora poderá perguntar para ambos os elementos: “Que dados temos?”; “Com esses dados, qual dos critérios podemos utilizar?”

Caso a professora repare que a dúvida é generalizada, resolverá, no quadro, para o primeiro par de triângulos, incentivando a participação da turma.

Exercício 2:

Pelo critério AA (o ângulo em A é partilhado pelos triângulos e $A\hat{E}D = A\hat{C}B = 90°$ já que $[AC]$ é a altura do edifício) os triângulos $[ADE]$ e $[ABC]$ são



semelhantes, logo, a seguinte proporção é válida:

$$\frac{2+x}{2} = \frac{2,75}{0,8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1,6 + 0,8x = 5,5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0,8x = 3,9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 4,875$$

Portanto, a altura do edifício é

$$2 + 4,875 = 6,875$$

$$\approx 6,9\ m$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- perceber qual o critério que garante a semelhança entre os triângulos;
- estabelecer as relações entre os lados correspondentes.

O aluno poderá, assim que encontrar o valor de x, pensar que o problema está resolvido, esquecendo-se de que o comprimento pedido resulta da soma entre o valor de x e 2.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar aos alunos: “Que dados temos?”; “Com esses dados, qual dos critérios podemos utilizar?”.

Deverá ser sugerido ao aluno que represente os triângulos à parte da figura de forma a conseguir visualizar melhor os dados apresentados e assim conseguir perceber como deve relacionar os lados correspondentes.

A professora poderá perguntar, assim que se determinar o valor de x: “Já se encontrou a altura do edifício?”

3. Atividade 1 da página 40 do manual **10 minutos**

Esta atividade será resolvida pelos alunos com a professora, e à medida que vai sendo resolvida, vai sendo discutida. Pretende-se revisitar alguns tópicos previamente aprendidos pelos alunos.

i. Resolução e discussão: **10 minutos**

Exercício 1:

1.1. a) Opção B

1.1. b) Opção C

1.1. c) Opção A

É importante que os alunos compreendam que os catetos se relacionam com os ângulos e que consideramos o cateto oposto/adjacente a um determinado ângulo. É como se os catetos (terminologia introduzida aquando da aprendizagem do Teorema de Pitágoras) agora tivessem nomes próprios, nomes esses que dependem do ângulo que estamos a considerar. Já a hipotenusa é sempre o lado oposto ao ângulo de 90°.

1.2. Pelo Teorema de Pitágoras sai:

$$\overline{BC}^2 = 113{,}7^2 + 92{,}1^2 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 12927{,}69 + 8482{,}41 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 21410{,}1 \Leftrightarrow \overline{BC} = \sqrt{21410{,}1},$$

$$então\ \overline{BC} \approx 146{,}3\ m$$

É escolhida a solução positiva, já que estamos a tratar de medidas.

Dificuldades:

O aluno poderá não se recordar do enunciado do Teorema de Pitágoras e/ou ter dificuldades em escolher entre as duas soluções da equação, justificando que se trata de uma medida e que o seu valor não pode ser negativo.

Apoio a eventuais dificuldades:

Caso a professora constate que a dúvida sobre o enunciado do Teorema de Pitágoras é geral, recordará o enunciado no quadro com a ajuda dos alunos que o souberem enunciar. Relativamente ao número de soluções, a professora poderá perguntar: “Interessam-nos as duas soluções?”; “O que representa $\overline{BC}$ no contexto do problema?”.

1.3.

a) $B\hat{A}C = B\hat{D}E = B\hat{F}G = 90°$ e partilham o ângulo em B, então pelo critério de semelhança AA, os triângulos são semelhantes.

b) Opção D.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- perceber qual o critério que garante a semelhança entre os triângulos;
- relacionar os lados dos três triângulos entre si.

Apoio a eventuais dificuldades:

Caso a dúvida seja do par, a professora poderá perguntar para ambos os elementos: "Que dados temos?"; "Com esses dados, qual dos critérios podemos utilizar?"

A professora pode sugerir que os alunos representem cada triângulo à parte posicionando-os na forma que lhes apetecer de maneira a conseguirem relacioná-los. A professora pode também pedir que representem para cada triângulo os ângulos e que os relacionem com os lados correspondentes, nomeadamente que façam a marcação do ângulo reto e da hipotenusa, o que poderá facilitar a sua visualização.

4. Ficha 11: "A semelhança nas razões" **40 minutos**

i. Preâmbulo razões trigonométricas **2 minutos**

A professora irá questionar a turma como determinar alturas de edifícios inacessíveis sem recorrer aos critérios de semelhança de triângulos, e ao Teorema de Pitágoras. Neste momento, serão mostradas fotografias de edifícios/monumentos do Colégio Militar. A altura destes edifícios/monumentos será o ponto de partida para o estudo da Trigonometria, sendo que a resposta a este problema será dada no final da unidade temática.

A professora poderá ainda perguntar aos alunos, se fazem alguma ideia de como se calcula a distância entre duas estrelas ou a medida da largura de um rio num determinado ponto. Serve este ponto para mostrar aos alunos que a trigonometria não é utilizada somente para cálculos de alturas.

ii. Resolução 1ª página: **10 minutos**

Exercício 1:

a)

Antes de escrever a razão trigonométrica pedida é necessário calcular o comprimento da hipotenusa do triângulo, para isso utilizamos o Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB}^2 = 5^2 + 12^2 \Leftrightarrow \overline{AB} = \pm 13,$$

como só nos interessa o número positivo, uma vez que se trata de uma medida, $\overline{AB} = 13$.

Assim:

$i. \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{5}{13}$ $\qquad ii. \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{12}{13}$ $\qquad iii. \quad \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{5}{12}$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em reconhecer que deverá utilizar o Teorema de Pitágoras para determinar $\overline{\mathrm{AB}}$.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar: "O que representa $\overline{AB}$ no triângulo $[ABC]$?"; "Que conteúdo matemático conhecemos que nos permita calcular o comprimento de lados de triângulos retângulos?"

b)

i. Medida do comprimento do cateto oposto ao ângulo α;

ii. Medida do comprimento do cateto adjacente ao ângulo α;

iii. Medida do comprimento da hipotenusa.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em nomear cada lado do triângulo.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora pode sugerir que revisitem a atividade 1 da página 40 do manual que acabaram de realizar de forma a se relembrarem do que foi feito.

c)

i. $\frac{medida\ do\ comprimento\ do\ cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ \alpha}{medida\ do\ comprimento\ da\ hipotenusa} = seno\ \alpha = sen\alpha$

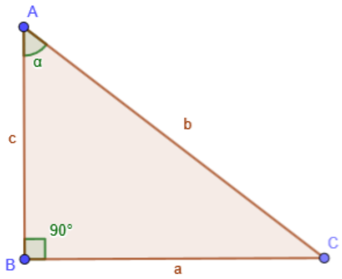
ii. $\frac{medida\ do\ comprimento\ do\ cateto\ adjecente\ ao\ \hat{a}ngulo\ \alpha}{medida\ do\ comprimento\ da\ hipotenusa} = cosseno\ \alpha = cos\alpha$

iii. $\frac{medida\ do\ comprimento\ do\ cateto\ oposto\ ao\ \hat{a}ngulo\ \alpha}{medida\ do\ comprimento\ do\ cateto\ adjacente\ ao\ \hat{a}ngulo\ \alpha} = tangente\ \alpha = tg\alpha$

Pretende-se realizar este exercício em conjunto com a turma. Será a professora a dar nomes aos quocientes apresentados, sendo, desta forma, introduzidas as razões trigonométricas. Para a resolução destas alíneas, serão usados os exercícios anteriores, e pretende-se que os alunos, com esses mesmos exercícios já tenham desenvolvido alguma intuição acerca daquilo que aqui é pedido.

iii. Sistematização das razões trigonométricas: **5 minutos**

Neste momento a professora utilizará a apresentação em PowerPoint para sistematizar as ideias apresentadas e para possibilitar aos alunos escreverem no caderno o conteúdo aprendido.



$$sen\alpha = \frac{medida\ do\ comprimento\ do\ cateto\ oposto\ a\ \alpha}{medida\ do\ comprimento\ da\ hipotenusa} = \frac{a}{b}$$

$$cos\alpha = \frac{medida\ do\ comprimento\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \alpha}{medida\ do\ comprimento\ da\ hipotenusa} = \frac{c}{b}$$

$$tg\alpha = \frac{medidad\ do\ comprimento\ do\ cateto\ oposto\ a\ \alpha}{medida\ do\ comprmento\ do\ cateto\ adjacente\ a\ \alpha} = \frac{a}{c}$$

Será importante informar os alunos que existem outras abreviaturas para o seno e para a tangente, assim a professora indicará que também podemos representar $sen\alpha = sin\alpha$ e $tg\alpha = tan\alpha$.

A professora pedirá para os alunos escreverem com uma cor "*chanã*" (linguagem habitual da professora da turma) a seguinte nota: só podemos calcular as razões trigonométricas quando o triângulo é retângulo.

Oralmente, a professora pode referir que é por esta razão que sempre que surge seno/cosseno/tangente, no manual dos alunos, vem seguido de: "de um ângulo agudo".

iv. Resolução 2ª página: **13 minutos**

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

v. Apresentação da resolução e discussão: **10 minutos**

A seleção dos grupos para ser apresentada a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à escolha.

Exercício 2:

a) $sen\alpha = \frac{20}{29}; cos\alpha = \frac{21}{29}; tg\alpha = \frac{20}{21}$.

b) $sen\beta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; cos\beta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; tg\beta = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

c) $sen\gamma = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}; cos\gamma = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}; tg\gamma = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

d) $sen\delta = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}; cos\delta = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}; tg\delta = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

É importante dizer aos alunos que eles devem apresentar sempre a forma irredutível do quociente resultante da razão trigonométrica que estão a determinar. No entanto, deverão, também, sempre, e tal como já fazem para as probabilidades, apresentar as frações originais, para mostrarem ao professor de onde surgem esses números.

A professora pode aproveitar o momento para pedir aos alunos que registem no seu caderno como se leem as letras gregas apresentadas: α – alfa; β – beta; γ – gama; δ – delta.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em conseguir determinar as razões trigonométricas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que sejam consultados o exercício 1 (anterior) da presente ficha e os registos que fez no caderno diário.

Exercício 3:

a) Antes de escrever a razão trigonométrica pedida é necessário calcular a medida de comprimento da hipotenusa do triângulo, para isso utilizamos o Teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow h = \pm 5,$$

como só nos interessa o número positivo, uma vez que se trata de uma medida, $h = 5$.

Assim:

$$sen\alpha = \frac{3}{5}; cos\alpha = \frac{4}{5}; tg\alpha = \frac{3}{4}.$$

b) Antes de escrever a razão trigonométrica pedida é necessário calcular a medida de comprimento do cateto adjacente ao ângulo β, para isso utilizamos o Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = 10^2 - 8^2 \Leftrightarrow c = \pm 6,$$

como só nos interessa o número positivo, uma vez que se trata de uma medida, $c = 6$.

Assim:

$$sen\beta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; cos\beta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; tg\beta = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}.$$

c) Antes de escrever a razão trigonométrica pedida é necessário calcular a medida de comprimento dos catetos do triângulo. A indicação da figura diz-nos que o triângulo é isósceles, logo os dois catetos têm a mesma medida de comprimento. Utilizando o Teorema de Pitágoras:

$$2^2 = c^2 + c^2 \Leftrightarrow 4 = 2c^2 \Leftrightarrow c^2 = 2 \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{2},$$

como só nos interessa o número positivo, uma vez que se trata de uma medida, $c = \sqrt{2}$.

Assim:

$$sen\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}; cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}; tg\gamma = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1.$$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em conseguir determinar as razões trigonométricas.

O aluno poderá pensar que os dados que lhe são fornecidos diretamente serão suficientes para a realização do exercício.

Na alínea c), o aluno poderá ter dificuldade em perceber que os catetos terem a mesma medida de comprimento.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que seja consultado o exercício 1 ou 2 da presente ficha, bem como o caderno diário.

A professora poderá perguntar: "Será que com os dados que temos, conseguimos determinar as razões trigonométricas pedidas?"; "O que precisamos para determinar o seno do ângulo pedido?"; "E para o cosseno?"; "E para a tangente?"; "Como conseguimos determinar esses comprimentos em falta, com os dados fornecidos?"; "Que conhecimento matemático temos para determinação de comprimentos de lados de triângulos retângulos?"

5. Síntese **5 minutos**

A professora referirá que conforme o lado do triângulo cujo comprimento é conhecido e a forma como este se relaciona com o ângulo também conhecido é possível estabelecer as razões (quocientes), a que chamamos trigonométricas como vimos na ficha 11 (seno, cosseno e tangente).

O estudo da trigonometria é o estudo do triângulo que é uma figura importantíssima, dado que conhecendo bem as suas propriedades e possíveis relações entre elas, conhece-se qualquer outra figura geométrica, porque como já foi anteriormente estudado, qualquer polígono convexo é passível de triangulação.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES:

Uma vez que os alunos têm ritmos de trabalho diferentes, e para permitir que os alunos usem o tempo de aula de forma útil, será sugerido, aos alunos que tenham concluído o trabalho proposto, a tarefa para trabalho de casa, a atividade 2 do manual (página 42) ou ainda o exercício 1 do caderno de atividades (página 85).

Todos os exercícios que não forem feitos em sala de aula, serão indicados como trabalho para casa, a verificar na aula seguinte.

AVALIAÇÃO:

A avaliação incidirá nas dinâmicas de pares e no trabalho produzido pelos mesmos, bem como a respetiva participação nas sucessivas discussões. Ir-se-á avaliar o empenho dos alunos, o seu trabalho em aula e as principais dificuldades sentidas. Utilizar-se-ão as tabelas de participação e idas ao quadro, recorrentes nas aulas.

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias
Professoras-estagiárias: Débora Ferrage e Joana Dias

Data: 21/02/2019 Ano: 9.º Turma: B/C Duração: 90 minutos

LIÇÃO N.º: 95 e 96

ALUNOS EM FALTA:

SUMÁRIO:

- Razões trigonométricas: ficha de trabalho.
- Invariância nas razões trigonométricas.
- Resolução de exercícios.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS: Razões trigonométricas e as suas propriedades.

DOMÍNIO: Geometria e Medida 9 (GM 9).

SUBDOMÍNIO: Trigonometria

METODOLOGIA DA AULA: Trabalho autónomo a pares; Discussão e sistematização de ideias em grupo turma.

OBJETIVOS DA AULA: Consolidação das razões trigonométricas.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS: Razões trigonométricas e critérios de semelhança de triângulos.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS:

- Desenvolver a comunicação matemática dos alunos, sendo a comunicação escrita potenciada pelas resoluções que estes apresentam das tarefas propostas e a comunicação oral estimulada através da dinâmica do par onde estão inseridos e das discussões que serão promovidas em grupo turma;
- Desenvolver o raciocínio matemático, dado que os alunos irão, por eles próprios, chegar aos resultados pretendidos uma vez que as tarefas propostas apresentam um encadeamento com esse sentido.

RECURSOS:

- Da professora: manual; fichas de trabalho; tabelas de registo (participação e idas ao quadro); *tablets* com Geogebra.

- Do aluno: manual; caderno diário.

MOMENTOS DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. (10 minutos)
   Formação dos grupos.
2. Adendas à aula anterior. (10 minutos)
3. Continuação da sistematização sobre as razões trigonométricas. (5 minutos)
4. Continuação da resolução da ficha 11: "Razões trigonométricas" (20 minutos)
   i. Resolução 2ª página; (10 minutos)
   ii. Apresentação da resolução e discussão. (10 minutos)
5. Invariância das razões trigonométricas: Ficha de trabalho 12 (40 minutos)
   i. Resolução dos três primeiros exercícios da ficha; (15 minutos)
   ii. Discussão e Sistematização das ideias; (5 minutos)
   iii. Resolução do último exercício da ficha; (5 minutos)
   iv. Discussão e Sistematização das ideias. (15 minutos)
      1. Atividade 6, página 47 do manual
      2. Exercício 7, página 47 do manual

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. **10 minutos**

Formação dos grupos

Neste momento da aula, a professora irá indicar aos alunos que formem grupos (de dois ou três alunos) e distribuirá os enunciados, relembrando aos alunos que devem fazer a sua resolução na ficha de trabalho e a correção diretamente no caderno diário.

Uma vez que os alunos estão a trabalhar colaborativa e cooperativamente, sempre que possível a professora sugerirá que eles discutam entre si a fim de se entreajudarem.

2. Adendas à aula anterior. **10 minutos**

Neste momento da aula, a professora irá complementar alguns detalhes em resoluções de exercícios realizados na aula anterior.

– A professora começará por indicar que no exercício 2 da ficha 10, a proporção verifica-se só porque os triângulos são semelhantes, o que deverá ser argumentado pelos alunos com os critérios que já conhecem, isto é: $\frac{2+x}{2} = \frac{2,75}{0,8}$ é uma proposição verdadeira porque os triângulos são semelhantes. O que garante esta semelhança? Os triângulos partilham um ângulo e ambos têm um ângulo reto (dado que se trata de uma altura de um edifício), logo pelo critério AA os triângulos são semelhantes.

– A professora referirá que tal como se teve de fazer para este exercício, no exercício de trabalho de casa, a semelhança também tem de ser garantida. Mais uma vez, a semelhança entre os triângulos verifica-se pelo critério AA ($C\hat{A}E = C\hat{B}D = 90°$ e partilham o ângulo em C).

2. Continuação da sistematização sobre as razões trigonométricas. **5 minutos**

Este será um momento onde a professora irá concluir a sistematização iniciada na aula anterior sobre as razões trigonométricas. A professora dirá aos alunos para continuarem a registar no caderno as conclusões sobre as razões trigonométricas. A professora deverá indicar aos alunos para escreverem como título: "Nota sobre as razões trigonométricas":

Só podemos calcular as razões trigonométricas quando o triângulo é retângulo.

A professora deverá desenhar um triângulo retângulo no quadro para que eles percebam o porquê de apenas se calcularem razões trigonométricas de ângulos agudos (soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo $= 180°$).

Oralmente, a professora pode referir que é por esta razão que sempre que surge seno/cosseno/tangente, no manual dos alunos, vem seguido de: "de um ângulo agudo".

3. Continuação da resolução da ficha 11 **20 minutos**

vi. Resolução 2ª página: **10 minutos**

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

vii. Apresentação da resolução e discussão: **10 minutos**

A seleção dos grupos a apresentar a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à sua escolha.

Exercício 2:

a) $sen\alpha = \frac{20}{29}; cos\alpha = \frac{21}{29}; tg\alpha = \frac{20}{21}$.

b) $sen\beta = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; cos\beta = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; tg\beta = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

c) $sen\gamma = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}; cos\gamma = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}; tg\gamma = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$.

d) $sen\delta = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}; cos\delta = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}; tg\delta = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

É importante dizer aos alunos que eles devem apresentar sempre a forma irredutível do quociente resultante da razão trigonométrica que estão a determinar. No entanto, deverão, também, sempre, e tal como já fazem para as probabilidades, apresentar as frações originais, para mostrarem ao professor de onde surgem esses números.

A professora pode aproveitar o momento para pedir aos alunos que registem no seu caderno como se leem as letras gregas apresentadas: α – alfa; β – beta; γ – gama; δ – delta.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em conseguir determinar as razões trigonométricas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que sejam consultados o exercício 1 (anterior) da presente ficha e os registos que fez no caderno diário.

Exercício 3:

a) Antes de escrever a razão trigonométrica pedida é necessário calcular a medida de comprimento da hipotenusa do triângulo, para isso utilizamos o Teorema de Pitágoras:

$$h^2 = 4^2 + 3^2 \Leftrightarrow h = \pm 5,$$

como só nos interessa o número positivo, uma vez que se trata de uma medida, $h = 5$.

Assim:

$$sen\alpha = \frac{3}{5}; cos\alpha = \frac{4}{5}; tg\alpha = \frac{3}{4}.$$

c) Antes de escrever a razão trigonométrica pedida é necessário calcular a medida de comprimento dos catetos do triângulo. A indicação da figura diz-nos que o triângulo é isósceles, logo os dois catetos têm a mesma medida de comprimento. Utilizando o Teorema de Pitágoras:

$$2^2 = c^2 + c^2 \Leftrightarrow 4 = 2c^2 \Leftrightarrow c^2 = 2 \Leftrightarrow c = \pm\sqrt{2},$$

como só nos interessa o número positivo, uma vez que se trata de uma medida, $c = \sqrt{2}$.

Assim:

$$sen\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}; cos\gamma = \frac{\sqrt{2}}{2}; tg\gamma = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1.$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em conseguir determinar as razões trigonométricas.

O aluno poderá pensar que os dados que lhe são fornecidos diretamente serão suficientes para a realização do exercício.

Na alínea c), o aluno poderá ter dificuldade em perceber que os catetos terem a mesma medida de comprimento.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que seja consultado o exercício 1 ou 2 da presente ficha, bem como o caderno diário.

A professora poderá perguntar: “Será que com os dados que temos, conseguimos determinar as razões trigonométricas pedidas?”; “O que precisamos para determinar o seno do ângulo pedido?”; “E para o cosseno?”; “E para a tangente?”; “Como conseguimos determinar esses comprimentos em falta, com os dados fornecidos?”; “Que conhecimento matemático temos para determinação de comprimentos de lados de triângulos retângulos?”.

4. Invariância nas razões: Ficha de trabalho 12 **40 minutos**

Ficha de trabalho 12: “Invariância nas razões trigonométricas”

Neste momento, a professora entregará as fichas de trabalho, um enunciado a cada grupo e ainda os *tablets* que também serão distribuídos um por cada grupo.

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter. A seleção dos grupos a apresentar a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à sua escolha.

Dificuldades gerais:

Podem prever-se algumas dificuldades com a manipulação do Geogebra dado que, apesar dos alunos estarem familiarizados com o software, já faz algum tempo que não o utilizam. Desta forma, se a professora compreender que existe muita e generalizada dificuldade com o mesmo, deverá realizar o exercício 2 com os alunos, utilizando para isso o computador de secretária, projetando o que se está a passar.

i. Resolução dos três primeiros exercícios da ficha **15 minutos**

Exercício 1:

1.1. 28,3 ° (este valor, tal como os seguintes, poderão ser diferentes caso o aluno opte por um triângulo retângulos com outras medidas de comprimento).

1.2. Por observação na zona gráfica do programa, sai:

- 1.2.1. 0,47
- 1.2.2. 0,88
- 1.2.3. 0,54

Exercício 2:

2.1. Conforme se movimenta o ponto C para cima (aumenta-se a distância de A para C, aumentando, assim, o comprimento da hipotenusa do triângulo), a amplitude do ângulo aumenta. Por outro lado, se o C se movimento o ponto C para baixo (diminui-se a distância de A para C, diminuindo, assim, o comprimento da hipotenusa do triângulo), a amplitude do ângulo diminui.

2.2. Quando o C se move para cima, as razões trigonométricas seno e tangente aumentam e o cosseno diminui; quando se move o ponto C para baixo, as razões trigonométricas seno e tangente diminuem e o cosseno aumenta.

2.3. Sim, porque ao mexermos com o ponto C, alteramos as medidas de comprimento da hipotenusa e do cateto oposto e, portanto, as razões trigonométricas alteram-se.

Exercício 3:

3.1. O valor da amplitude do ângulo não se altera.

3.2. O ângulo em A é partilhado por todos os triângulos que se possam obter e todos têm um ângulo reto (o triângulo nunca deixa de ser retângulo), logo pelo critério AA os triângulos são todos semelhantes entre si.

3.3. As razões trigonométricas permanecem inalteráveis, seja qual for a posição do ponto B.

3.4. Não! À medida que se movimenta o ponto B, os comprimentos de todos os lados do triângulo vão-se alterando, no entanto, as razões trigonométricas mantêm-se invariáveis.

ii. Discussão e Sistematização das ideias **5 minutos**

A professora poderá questionar os alunos: "Então, mas porque será que as razões trigonométricas se alteram quando mexo no ponto C e não se alteram quando mexo no ponto B?" Os alunos deverão ser capazes de compreender que esta alteração vem do facto de ao movimentar o ponto C só se altera dois dos comprimentos dos lados (cateto oposto ao ângulo alfa e a hipotenusa), enquanto que ao movimentar o ponto B, todas os comprimentos se alteram ao mesmo tempo e da mesma forma, ou seja, são criados triângulos semelhantes a cada momento (como já argumentamos na pergunta 3).

Para concluir aquilo que os alunos acabaram de observar nos três primeiros exercícios da ficha, a professora explicará aos alunos que se considerar dois triângulos quaisquer semelhantes entre si (um mais pequeno que o outro), pode-se considerar que as medidas dos comprimentos de cada triângulo vêm em unidades diferentes (o triângulo mais pequeno poderá estar em cm, e o maior em metros), no entanto, como já viram, as razões são iguais para ambos os triângulos. E porquê? Porque as razões trigonométricas dependem apenas da amplitude do ângulo que estamos a considerar (daí insistirmos para que escrevam sempre seno de alfa, cosseno de alfa, etc.). Assim, os alunos deverão escrever no seu caderno: O valor de cada uma das razões trigonométricas de um ângulo agudo é independente da unidade de comprimento fixada, mas esta tem de ser a mesma para os dois termos da razão.

iii. Resolução do último exercício da ficha **5 minutos**

Exercício 4:

4.1. Não a ambas as perguntas. Por muito que se tente aproximar o valor do seno a um número negativo o mais próximo que chega é a perto de zero. Analogamente para o valor 1,5.

4.2. O seno e o cosseno podem variar entre zero e um.

iv. Discussão e Sistematização das ideias **15 minutos**

Para provar aquilo que os alunos conjeturam na pergunta 4 na ficha de trabalho 12, serão propostas as atividades 6 e 7 da página 47 do manual, que generalizam aquilo que foi visto na ficha de trabalho.

Atividade 6 da página 47 do manual:

Temos que $sen\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$, sendo esta uma razão entre duas medidas, o quociente é maior do que zero. Temos ainda que $\overline{BC}$ é o comprimento de um cateto, logo é menor que $\overline{AC}$, que é o comprimento da hipotenusa, assim, esta razão será menor que 1. Portanto, $0 < sen\alpha < 1$. De forma análoga se conclui que $0 < cos\alpha < 1$.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- conseguir escrever o quociente que traduz o seno e o cosseno;
- compreender que o quociente entre dois números positivos é um número positivo, e dado que as razões trigonométricas são quocientes entre medidas, estas também serão positivas;

– relembrar que numa fração com numerador e denominador positivos, quando o numerador é menor do que o denominador, então o quociente é sempre menor do que um;
– concluir o pretendido.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora sugerirá que sejam consultados os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende.

A professora poderá perguntar:

– "O que são $\overline{BC}$; $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$?"; "Se são medidas de comprimento podem ser negativas?"; "E zero?".
– "Que tipo de fração é esta?"; "O numerador é maior ou menor que o denominador?"; "Então o que acontece quando tenho frações deste tipo?".

A professora sugerirá ao aluno que escreva em dois passos as inferências que retirou da atividade: primeiramente, $sena > 0$ e $sena < 1$. Relembrando o que foi lecionado na unidade das inequações, pode-se colocar o $sena$ no meio e obter a dupla desigualdade. Analogamente para o cosseno.

<u>Conclusões</u>

A professora indicará aos alunos que registem no seu caderno que o seno e o cosseno de um ângulo agudo é sempre um número real positivo menor do que 1, isto é, $0 < sen\alpha < 1$ e $0 < cos\alpha < 1$, para todo o ângulo agudo α.

Para fazer a ligação entre esta atividade e a atividade 7 a professora perguntará à turma:

"Então e entre que valores se situará a tangente?"; "Acham que será também entre 0 e 1?".

Resolução do exercício 7 da página 47 do manual:

a) $tg\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$;

b)

- $0 < tg\alpha < 1$, quando $\overline{BC} < \overline{AB}$.
- $tg\alpha = 1$, quando $\overline{BC} = \overline{AB}$.
- $tg\alpha > 1$, quando $\overline{BC} > \overline{AB}$.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- conseguir escrever o quociente que traduz a tangente;
- compreender que o quociente entre dois números positivos é um número positivo, e dado que as razões trigonométricas são quocientes entre medidas, estas também serão positivas;
- relembrar que numa fração com numerador e denominador positivos, quando o numerador é menor do que o denominador, então o quociente é sempre menor do que um.

Motivado pela figura, o aluno poderá considerar que o comprimento do cateto oposto é sempre menor do que o do cateto adjacente, e, portanto, a razão é sempre menor do que 1.

O aluno poderá ter dificuldades em concluir o pretendido.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que sejam consultados os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende.

A professora poderá perguntar:

- "O que são $\overline{BC};\ \overline{AB}\ e\ \overline{AC}$?"; "Se são medidas de comprimento podem ser negativas?"; "E zero?"
- Para o primeiro caso: "Que tipo de fração é esta?"; "O numerador é maior ou menor que o denominador?"; "Então o que acontece quando tenho frações deste tipo?".

A professora sugerirá, se necessário, para o segundo caso, ao aluno que escreva em dois passos as inferências que retirou da atividade: primeiramente, $tg\alpha > 0$ e $tg\alpha < 1$. Relembrando o que foi lecionado na unidade das inequações, pode-se colocar o $tg\alpha$ no meio e obter a dupla desigualdade.

A professora poderá perguntar:

- para o terceiro caso: "Quando é que um quociente é 1?"; "Se o numerador é igual ao denominador, o que acontece com o triângulo?"; "Como se chama esse tipo de triângulo?".
- "Quando é que uma razão é maior do que 1?"; "Então se o numerador é maior, o que acontece com o triângulo?".

Conclusões

A professora indicará aos alunos que registem no seu caderno que a tangente de um ângulo agudo é sempre maior do que zero e:

- Menor do que 1, quando o comprimento do cateto oposto é menor que o comprimento cateto adjacente;
- Igual a 1, quando o cateto oposto e o cateto adjacente têm o mesmo comprimento, ou seja, quando o triângulo é isósceles;
- Maior do que 1, quando o comprimento do cateto oposto é maior do que o comprimento do cateto adjacente.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES:

Uma vez que os alunos têm ritmos de trabalho diferentes, e para permitir que os alunos usem o tempo de aula de forma útil, será sugerido, aos alunos que tenham concluído o trabalho proposto, o exercício 1 do caderno de atividades (página 85); os exercícios 15 e 16 da página 53; o exercício 23 da página 54; exercício1 da página 63 e os exercícios 55, 56 e 57 da página 64. Todos os exercícios que não forem feitos em sala de aula, serão indicados como trabalho para casa, a verificar na aula seguinte.

AVALIAÇÃO:

A avaliação incidirá nas dinâmicas de pares e no trabalho produzido pelos mesmos, bem como a respetiva participação nas sucessivas discussões. Ir-se-á avaliar o empenho dos alunos, o seu trabalho em aula e as principais dificuldades sentidas. Utilizar-se-ão as tabelas de participação e idas ao quadro, recorrentes nas aulas.

Anexo 25: Plano de aula do dia 25 de fevereiro de 2019

Plano de aula

Colégio Militar
Fundado em 1803

Professora: Anabela Candeias
Professoras-estagiárias: Débora Ferrage e Joana Dias

Data: 25/02/2019 Ano: 9.º Turma: B/C Duração: 90 minutos

LIÇÃO N.º: 99

ALUNOS EM FALTA:

SUMÁRIO:

- Razões trigonométricas de dois ângulos de igual amplitude: continuação.
- Razões trigonométricas: calculadora.

– Resolução de exercícios.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS: Razões trigonométricas e as suas propriedades.
DOMÍNIO: Geometria e Medida 9 (GM 9).
SUBDOMÍNIO: Trigonometria
METODOLOGIA DA AULA: Trabalho autónomo a pares; Discussão e sistematização de ideias em grupo turma.
OBJETIVOS DA AULA: Consolidação e estudo de propriedades das razões trigonométricas.
CONHECIMENTOS PRÉVIOS: Razões trigonométricas e critérios de semelhança de triângulos.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS:

- Desenvolver a comunicação matemática dos alunos, sendo a comunicação escrita potenciada pelas resoluções que estes apresentam das tarefas propostas e a comunicação oral estimulada através da dinâmica do par onde estão inseridos e das discussões que serão promovidas em grupo turma;
- Desenvolver o raciocínio matemático, dado que os alunos irão, por eles próprios, chegar aos resultados pretendidos uma vez que as tarefas propostas apresentam um encadeamento com esse sentido.
-

RECURSOS:

- Da professora: manual; fichas de trabalho; tabelas de registo (participação e idas ao quadro);
- Do aluno: manual; caderno diário.

MOMENTOS DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. (5 minutos)
   Formação dos grupos.
2. Atividade 6 do manual (pág. 47) (10 minutos)
   i. Resolução; (3 minutos)
   ii. Apresentação da resolução; (5 minutos)
   iii. Sistematização das ideias. (2 minutos)
3. Exercício 7 do manual (pág. 47) (10 minutos)
   i. Resolução; (3 minutos)
   ii. Apresentação da resolução; (2 minutos)
   iii. Sistematização das ideias; (5 minutos)

4. Razões trigonométricas de dois ângulos de igual amplitude: Atividade 5 (12 minutos)
    i. Resolução; (5 minutos)
    ii. Apresentação da resolução; (5 minutos)
    iii. Sistematização das ideias. (2 minutos)
5. Razões trigonométricas: calculadora (8 minutos)
    i. Atividade 8, pág. 48;
        i. Esclarecimento; (5 minutos)
        ii. Resolução; (3 minutos)
    ii. Resolução exercício 9, pág. 48; (caso haja tempo)
        i. Resolução.
    iii. Resolução exercício 58, pág. 64. (caso haja tempo)
        i. Resolução.

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. **5 minutos**

Formação dos grupos

Neste momento da aula, a professora irá indicar aos alunos que formem os grupos já previamente indicados, relembrando-os que o trabalho colaborativo tem como objetivo a entreajuda, possibilitando a discussão de resoluções e resultados.

2. Atividade 6 do manual **10 minutos**

i. Resolução: **3 minutos**

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

ii. Apresentação da resolução e discussão: **5 minutos**

A seleção dos grupos para ser apresentada a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não hajam grupos voluntários, a professora procederá à escolha.

Atividade 6 da página 47 do manual:

Temos que $sen\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$, sendo esta uma razão entre duas medidas, o quociente é maior do que zero. Temos ainda que $\overline{BC}$ é o comprimento de um cateto, logo é menor que $\overline{AC}$, que é o comprimento da hipotenusa, assim, esta razão será menor que 1. Portanto, $0 < sen\alpha < 1$. De forma análoga se conclui que $0 < cos\alpha < 1$.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- conseguir escrever o quociente que traduz o seno e o cosseno;
- compreender que o quociente entre dois números positivos é um número positivo, e dado que as razões trigonométricas são quocientes entre medidas, estas também serão positivas;
- relembrar que numa fração com numerador e denominador positivos, quando o numerador é menor do que o denominador, então o quociente é sempre menor do que um;
- concluir o pretendido.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que sejam consultados os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende.

A professora poderá perguntar:

- "O que são $\overline{BC}$; $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$?"; "Se são medidas de comprimento podem ser negativas?"; "E zero?".
- "Que tipo de fração é esta?"; "O numerador é maior ou menor que o denominador?"; "Então o que acontece quando tenho frações deste tipo?".

A professora sugerirá ao aluno que escreva em dois passos as inferências que retirou da atividade: primeiramente, $sen\alpha > 0$ e $sen\alpha < 1$. Relembrando o que foi lecionado na unidade das inequações, pode-se colocar o $sen\alpha$ no meio e obter a dupla desigualdade. Analogamente para o cosseno.

iii. Sistematização das ideias: **2 minutos**

A professora indicará aos alunos que registem no seu caderno o seguinte resultado:

Resultado 1:

O seno e o cosseno de um ângulo agudo é sempre um número real positivo menor do que 1, isto é, $0 < sen\alpha < 1$ *e* $0 < cos\alpha < 1$*, para todo o ângulo agudo* α.

Para fazer a ligação entre esta atividade e a atividade 7 a professora perguntará à turma:

"Então e entre que valores se situará a tangente?"; "Acham que será também entre 0 e 1?".

Resolução do exercício 7 da página 47 do manual:

i. Resolução: **3 minutos**

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

ii. Apresentação da resolução e discussão: **5 minutos**

A seleção dos grupos para ser apresentada a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à escolha.

c) $tg\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$;

d)

- $0 < tg\alpha < 1$, quando $\overline{BC} < \overline{AB}$.
- $tg\alpha = 1$, quando $\overline{BC} = \overline{AB}$.
- $tg\alpha > 1$, quando $\overline{BC} > \overline{AB}$.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

– conseguir escrever o quociente que traduz a tangente;

– compreender que o quociente entre dois números positivos é um número positivo, e dado que as razões trigonométricas são quocientes entre medidas, estas também serão positivas;

– relembrar que numa fração com numerador e denominador positivos, quando o numerador é menor do que o denominador, então o quociente é sempre menor do que um.

Motivado pela figura, o aluno poderá considerar que o comprimento do cateto oposto é sempre menor do que o do cateto adjacente, e, portanto, a razão é sempre menor do que 1.

O aluno poderá ter dificuldades em concluir o pretendido.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que sejam consultados os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende.

A professora poderá perguntar:

– "O que são $\overline{BC}$; $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$?"; "Se são medidas de comprimento podem ser negativas?"; "E zero?"
– Para o primeiro caso: "Que tipo de fração é esta?"; "O numerador é maior ou menor que o denominador?"; "Então o que acontece quando tenho frações deste tipo?".

A professora sugerirá, se necessário, para o segundo caso, ao aluno que escreva em dois passos as inferências que retirou da atividade: primeiramente, $tg\alpha > 0$ e $tg\alpha < 1$. Relembrando o que foi lecionado na unidade das inequações, pode-se colocar o $tg\alpha$ no meio e obter a dupla desigualdade.

A professora poderá perguntar:

– para o terceiro caso: "Quando é que um quociente é 1?"; "Se o numerador é igual ao denominador, o que acontece com o triângulo?"; "Como se chama esse tipo de triângulo?".
– "Quando é que uma razão é maior do que 1?"; "Então se o numerador é maior, o que acontece com o triângulo?".

iii. Sistematização das ideias: **2 minutos**

A professora indicará aos alunos que registem no seu caderno o seguinte resultado:

Resultado 2:

A tangente de um ângulo agudo é sempre maior do que zero e:

– *Menor do que 1, quando o comprimento do cateto oposto é menor que o comprimento cateto adjacente;*

- *Igual a 1, quando o cateto oposto e o cateto adjacente têm o mesmo comprimento, ou seja, quando o triângulo é isósceles;*
- *Maior do que 1, quando o comprimento do cateto oposto é maior do que o comprimento do cateto adjacente.*

4. Razões trigonométricas de dois ângulos de igual amplitude: Atividade 5 12 minutos

i. Resolução: **5 minutos**

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Tal como é habitual, enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

Sendo uma atividade onde é necessário que os alunos realizem uma demonstração, é espectável que haja uma dificuldade generalizada da turma, pelo que se isso realmente se comprovar, a professora fará a primeira alínea e então, de seguida os alunos farão autonomamente as outras alíneas.

É importante que os alunos se convençam de que este é um resultado verdadeiro e óbvio.

ii. Apresentação da resolução e discussão: **5 minutos**

Tal como tem sido habitual, a seleção dos grupos para ser apresentada a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à escolha.

Atividade 5:

a) $A\hat{R}P = B\hat{S}Q = 90°$ e $\hat{\beta} = \widehat{\beta'}$, então pelo critério de semelhança AA (ângulo-ângulo), os triângulos $[ARP]$ e $[BSQ]$ são semelhantes.

Em triângulos semelhantes, os comprimentos dos lados correspondentes são diretamente proporcionais. Logo,

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BQ}} \Leftrightarrow \overline{PR} \times \overline{BQ} = \overline{QS} \times \overline{AP} \Leftrightarrow \frac{\overline{PR}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{QS}}{\overline{BQ}} \Leftrightarrow sen\,\beta = sen\,\beta' \ \blacksquare$$

b) De modo análogo:

$$\frac{\overline{AR}}{\overline{BS}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{BQ}} \Leftrightarrow \overline{AR} \times \overline{BQ} = \overline{BS} \times \overline{AP} \Leftrightarrow \frac{\overline{AR}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{BS}}{\overline{BQ}} \Leftrightarrow cos\,\beta = cos\,\beta' \ \blacksquare$$

c) De modo análogo:

$$\frac{\overline{PR}}{\overline{QS}} = \frac{\overline{AR}}{\overline{BS}} \Leftrightarrow \overline{PR} \times \overline{BS} = \overline{QS} \times \overline{AR} \Leftrightarrow \frac{\overline{PR}}{\overline{AR}} = \frac{\overline{QS}}{\overline{BS}} \Leftrightarrow tg\,\beta = tg\,\beta' \;\blacksquare$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- conseguir perceber como iniciar a demonstração, que passa, precisamente, por começar por justificar que os triângulos são semelhantes;
- escrever os quocientes que relacionam os lados de ambos os triângulos e depois escrever a fração conveniente para a obtenção da razão trigonométrica respetiva.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora começará por sugerir que os alunos observem que têm dois triângulos e que pelos dados do enunciado, é possível relacioná-los (semelhança de triângulos e sua argumentação).

A professora dirá aos alunos que temos que provar uma proposição do tipo: "se, …, então, …", logo assumimos que a primeira parte da frase é verdadeira, e é por essa que começamos a nossa demonstração, sendo essa a primeira frase da mesma. A segunda parte da frase é onde queremos chegar, logo, será essa a última frase da demonstração que estamos a fazer. A professora deverá escrever dessa forma no quadro, deixando o espaço entre a primeira e a última frase, dizendo que com os dados fornecidos inicialmente, os alunos deverão preencher o que falta no meio, de forma a completar a demonstração. (A primeira demonstração deverá ser feita em conjunto de forma a que os alunos percebam o que está envolvido e que tipo de argumentos deverão ser elaborados para a prova.)

A professora poderá perguntar:

– "Já provei que os triângulos são semelhantes, então como posso relacionar os lados de cada triângulo de forma a obter o que pretendo?";

– "Depois de relacionar ambos os triângulos como posso fazer aparecer a razão trigonométrica que pretendo?"; "O que é o seno (cosseno, tangente) nestes triângulos?".

Para fazer a passagem da semelhança entre os dois triângulos e as razões trigonométricas, a professora poderá fazer uma passagem intermédia, utilizando um conhecimento do 2.º ciclo - o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

iii. <u>Sistematização de ideias</u>: **2 minutos**

Neste momento a professora indicará aos alunos que escrevam no caderno diário o seguinte:

Resultado 3:

Ângulos de igual amplitude têm o mesmo seno, cosseno e tangente.

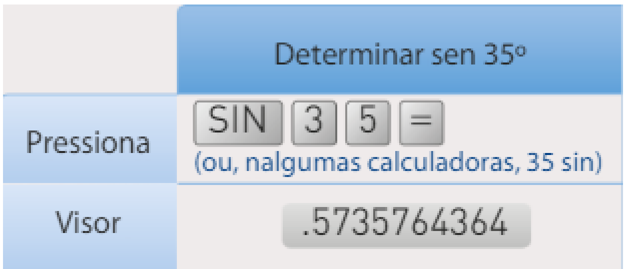
5. Razões trigonométricas: calculadora **8 minutos**

i. <u>Esclarecimento</u>: **5 minutos**

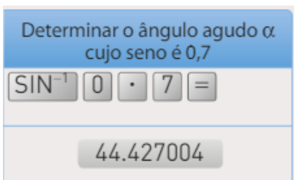
Antes de iniciar, a professora irá confirmar se os alunos têm a calculadora em graus. Para isso pedirá aos alunos que calculem a tangente de 45°. Àqueles alunos que não der o resultado 1, será feita a correção nas definições na calculadora.

Para um melhor entendimento dos alunos, a professora utilizará os seguintes esquemas e fará referência aos seguintes pontos:

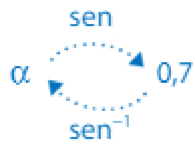
- ✓ "Procurem a tecla SIN ou SEN na vossa calculadora. Então vamos lá calcular o $sen\ 35°$"



- ✓ "Ou seja, ao conhecer o ângulo, descobrimos o valor da razão trigonométrica."
- ✓ "Então agora reparem no que está escrito em cima da tecla do seno?" Alguns alunos responderão SIN^{-1} ou SEN^{-1} ou $ARCSEN$ ou $ARCSIN$ pelo que será indicado que estas são todas maneiras válidas de representar a inversa da razão trigonométrica.
- ✓ "Se ao saber o ângulo, descobrimos o valor da razão usando a tecla SEN, o que acham que poderemos descobrir com a inversa?" Será expetável que os alunos respondam que é o valor do ângulo.
- ✓ Então vamos lá calcular qual o ângulo que tem o valor do seno 0,7:



- ✓ Para saber qual a combinação de teclas a pressionar para obter SIN^{-1}, a professora poderá indicar as seguintes opções (conforme o modelo da calculadora):
    - SHIFT + SIN
    - 2nd + SIN
    - INV + SIN
- ✓ Para concluir, a professora utilizará o esquema seguinte para fazer uma síntese do que foi referido anteriormente, caso seja conhecido o ângulo utilizamos o SIN para descobrir o valor da razão trigonométrica; caso seja conhecido o valor da razão trigonométrica, utilizamos SIN^{-1} para descobrir o valor do ângulo.



ii. <u>Resolução</u>: **3 minutos**

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Tal como é habitual, enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

Será indicado aos alunos que confirmem os resultados pelas soluções do manual. Caso haja alunos a terminar mais cedo relativamente à grande maioria da turma, será indicado que resolvam o exercício 9 do manual utilizando a calculadora e não a tabela como consta no enunciado.

Atividade 8:

8.1.

a) $sen\ 35° \approx 0{,}57$

b) $sen\ \alpha = 0{,}7, então\ \alpha = sen^{-1}(0{,}7) \approx 44{,}43°$

8.2.

a) $sen\ 64° \approx 0{,}899$

b) $cos\ 73° \approx 0{,}292$

c) $tg\ 21{,}3° \approx 0{,}390$

d) $sen\ 45° \approx 0{,}707$

e) $cos\ 60° \approx 0{,}500$

f) $tg\ 30{,}8° \approx 0{,}596$

8.3.

a) $sen\,\alpha = 0{,}531, então\ \alpha = sen^{-1}(0{,}531) \approx 32{,}1°$

b) $cos\,\alpha = \frac{3}{7}, então\ \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) \approx 64{,}6°$

c) $tg\,\alpha = 3{,}4, então\ \alpha = tg^{-1}(3{,}4) \approx 73{,}6°$

d) $sen\,\alpha = 0{,}001, então\ \alpha = sen^{-1}(0{,}001) \approx 0{,}1°$

e) $cos\,\alpha = 0{,}84, então\ \alpha = \cos^{-1}(0{,}84) \approx 32{,}9°$

f) $tg\,\alpha = 10000, então\ \alpha = tg^{-1}(10000) = 90{,}0°$

Exercício 9, página 48:

9.1.

a) $sen\,85° \approx 0{,}99619 \approx 0{,}996$

b) $tg\,63° \approx 1{,}96261 \approx 1{,}963$

d) $cos\,21° \approx 0{,}93358 \approx 0{,}934$

9.2.

a) $tg\,\alpha = 0{,}869, então\ \alpha = tg^{-1}(0{,}869) \approx 41°$

b) $sen\,\alpha = 0{,}210, então\ \alpha = sen^{-1}(0{,}210) \approx 12°$

c) $cos\,\alpha = 0{,}377, então\ \alpha = \cos^{-1}(0{,}377) \approx 68°$

Exercício 58, página 58:

a) $sen\,78° \approx 0{,}9781 \approx 0{,}98$

b) $tg\,54° \approx 1{,}3764 \approx 1{,}38$

d) $1 - cos\,60° = 1 - 0{,}5000 = 0{,}50$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- utilizar a calculadora devidamente, isto é, se lhe por pedido o ângulo cuja razão trigonométrica é uma fração, caso o aluno não utilize os parêntesis o resultado não será o correto;
- compreender quando utilizar a razão trigonométrica ou a sua inversa;
- fazer os arredondamentos quando a casa decimal que deverá sofrer alterações for 9, como é exemplo o 8.2. c) e o 8.3. f).

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora deverá:

- chamar à atenção de toda a turma que quando temos um número fracionário, os alunos deverão: ou calculam primeiro esse número fracionário e depois pedem à calculadora o valor da razão trigonométrica desse mesmo número, ou então, deverão escrever esse número entre parêntesis. Para ilustrar esta situação a professora utilizará como exemplo o exercício 8.3. b);

– perguntar: "O que é pedido?"; "O que é dado?"; a professora poderá ainda sugerir aos alunos que escrevam a razão trigonométrica que para que percebam como se relacionam os dados com o as perguntas;
– esclarecer que quando temos situações deste tipo, por exemplo $0,5895$ o número aproximado às milésimas deverá ser $0{,}590$, ou seja, fica o número seguinte ao 89, sendo que é necessário por o 0, dado que queremos uma aproximação às milésimas.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES:

Uma vez que os alunos têm ritmos de trabalho diferentes, e para permitir que os alunos usem o tempo de aula de forma útil, será sugerido, aos alunos que tenham concluído o trabalho proposto, os exercícios 1 e 5 do caderno de atividades (página 85); exercício 19 da página 53 do manual; exercícios 55, 56 e 57 da página 64 do manual; exercício 9 da página 48 (utilizando a calculadora); exercício 58 da página 64 (utilizando a calculadora). Todos os exercícios que não forem feitos em sala de aula, serão indicados como trabalho para casa, a verificar na aula seguinte.

AVALIAÇÃO:

A avaliação incidirá nas dinâmicas de pares e no trabalho produzido pelos mesmos, bem como a respetiva participação nas sucessivas discussões. Ir-se-á avaliar o empenho dos alunos, o seu trabalho em aula e as principais dificuldades sentidas. Utilizar-se-ão as tabelas de participação e idas ao quadro, recorrentes nas aulas.

Anexo 26: Plano de aula do dia 26 de fevereiro de 2019

Plano de aula

COLÉGIO MILITAR
Fundado em 1803

Professora: Anabela Candeias
Professoras-estagiárias: Débora Ferrage e Joana Dias

Data: 26/02/2019 Ano: 9.º Turma: B/C Duração: 90 minutos

LIÇÃO N.º: 100 e 101

ALUNOS EM FALTA:

SUMÁRIO:

- Entrega e correção da ficha de avaliação.
- Razões trigonométricas: calculadora e tabela.
- Esclarecimento de dúvidas.
- Resolução de exercícios.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS: Razões trigonométricas e as suas propriedades.

DOMÍNIO: Geometria e Medida 9 (GM 9).

SUBDOMÍNIO: Trigonometria

METODOLOGIA DA AULA: Trabalho autónomo individual; Discussão e sistematização de ideias em grupo turma.

OBJETIVOS DA AULA: Consolidar das razões trigonométricas e determinar o valor das razões trigonométricas através da tabela trigonométrica.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS: Razões trigonométricas.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS:

- Desenvolver a comunicação matemática dos alunos, sendo a comunicação escrita potenciada pelas resoluções que estes apresentam das tarefas propostas e a comunicação oral estimulada através da dinâmica do par onde estão inseridos e das discussões que serão promovidas em grupo turma;
- Desenvolver o raciocínio matemático, dado que os alunos irão, por eles próprios, chegar aos resultados pretendidos uma vez que as tarefas propostas apresentam um encadeamento com esse sentido.

RECURSOS:

- Da professora: fichas de avaliação; manual; tabelas trigonométricas; tabelas de registo (participação e idas ao quadro); apresentação PowerPoint.
- Do aluno: manual; caderno diário; calculadora científica.

MOMENTOS DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. (5 minutos)
2. Entrega e correção da ficha de avaliação nº5. (85 minutos)
3. Razões trigonométricas: calculadora e tabela. (caso haja tempo)
    i. Esclarecimento da utilização da calculadora
    ii. Resolução da atividade 8
    iii. Resolução do exercício 9

iv. Resolução do exercício 58

v. Esclarecimento da utilização da tabela

vi. Resolução da atividade e dos exercícios anteriores através da tabela

4. Esclarecimento de dúvidas (caso haja tempo)

i. Apresentação da resolução dos exercícios 55, 56 e 57.

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. **5 minutos**

2. Entrega e correção da ficha de avaliação nº5. **85 minutos**

Neste momento da aula, a professora entregará os testes aos alunos e projetará a resolução para que os alunos a passem para o seu caderno diário.

Exercício 1:

$$(x-a)^2+2ax=x^2-2ax+a^2+2ax=x^2+a^2$$

V1: D V2: D

Exercício 2:

- Pela lei do anulamento do produto:

$$2(x+1)-3x(x+1)=0 \Leftrightarrow (x+1)(2-3x)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+1=0 \lor 2-3x=0 \Leftrightarrow x=-1 \lor -3x=-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=-1 \lor x=\frac{-2}{-3} \Leftrightarrow x=-1 \lor x=\frac{2}{3}$$

$$S=\left\{-1,\frac{2}{3}\right\}$$

- Pelo método do completar quadrados:

$$\boxed{2b=\frac{1}{3} \qquad b=\frac{\frac{1}{3}}{2}=\frac{1}{6}}$$

$$2(x+1)-3x(x+1)=0 \Leftrightarrow 2x+2-3x^2-3x=0 \Leftrightarrow$$

$$-3x^2-x+2=0 \Leftrightarrow 3x^2+x-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x^2+\frac{x}{3}-\frac{2}{3}\right)=0 \Leftrightarrow 3\left(x^2+\frac{x}{3}+\left(\frac{1}{6}\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2-\frac{2}{3}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\left(x+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{1}{36}-\frac{2}{3}\right)=0 \Leftrightarrow 3\left(\left(x+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{25}{36}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2-3\times\frac{25}{36}=0 \Leftrightarrow 3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2-\frac{75}{36}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\left(x+\frac{1}{6}\right)^2=\frac{75}{36} \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{6}\right)^2=\frac{75}{3\times 36} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{25}{36} \Leftrightarrow x + \frac{1}{6} = \pm\sqrt{\frac{25}{36}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6} \vee x = -\frac{5}{6} - \frac{1}{6} \Leftrightarrow x = \frac{4}{6} \vee x = \frac{-6}{6} \Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \vee x = -1$$

$$S = \left\{-1, \frac{2}{3}\right\}$$

Exercício 3:

3.1.

$$\boxed{a = 2; b = 5; c = 2 - 8k}$$

$$2x^2 + 5x + 2 - 8k = 0$$

$$b^2 - 4ac > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5^2 - 4 \times 2 \times (2 - 8k) > 0 \Leftrightarrow 25 - 8(2 - 8k) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 25 - 16 + 64k > 0 \Leftrightarrow 9 + 64k > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 64k > -9 \Leftrightarrow k > -\frac{9}{64}$$

R: $k \in \left]-\frac{9}{64}, +\infty\right[$

3.2.

$$\boxed{a = 2; b = 5; c = -6}$$

$$k = 1 \Rightarrow 2x^2 + 5x + 2 - 8 \times 1 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 6 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \times 2 \times (-6)}}{2 \times 2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 48}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{73}}{4} \Leftrightarrow x = \frac{-5 - \sqrt{73}}{4} \vee x = \frac{-5 + \sqrt{73}}{4}$$

$$S = \left\{\frac{-5 - \sqrt{73}}{4}, \frac{-5 + \sqrt{73}}{4}\right\}$$

Exercício 4:

4.1.

- ✓ 1ª resolução:

$$comprimento: x - 2$$

$$largura: \frac{x - 7}{2}$$

$$A_t = 2 \times (x - 2)\left(\frac{x-7}{2}\right) = (x - 2)(x - 7) = x^2 - 7x - 2x + 14 = x^2 - 9x + 14 \ \blacksquare$$

- ✓ 2ª resolução:

$$A_{canteiros} = A_{total} - A_{cinzento}$$

$$A_{total} = x \times x = x^2$$

$$\Leftrightarrow A_{cinzento} = (2 \times x) + (x-2) \times 7 = 2x + 7x - 14 = 9x - 14$$

$$A_{canteiros} = A_{total} - A_{cinzento} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A_{canteiros} = x^2 - (9x - 14) = x^2 - 9x + 14 \ \blacksquare$$

4.2.

$$x^2 - 9x + 14 = 24 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 14 - 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9x - 10 = 0 \Leftrightarrow \qquad \boxed{a = 1; b = -9; c = -10}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \times 1 \times (-10)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 40}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{121}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm 11}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{9 - 11}{2} \vee x = \frac{9 + 11}{2} \Leftrightarrow x = \frac{-2}{2} \vee x = \frac{20}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \ \vee x = 10$$

$$S = \{-1, 10\}$$

R: O valor de x é 10 $metros$.

Exercício 5:

$$x = -1 \ \vee x = -5 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \vee x + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+5) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x + x + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

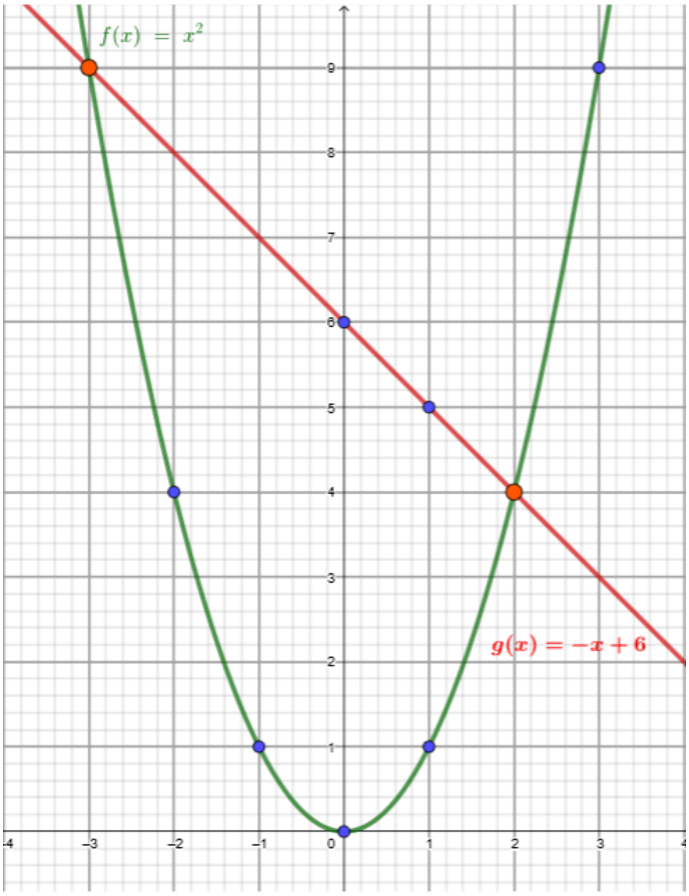
$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 = 0$$

Exercício 6:

$$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -x + 6$$

x	$y = x^2$
0	0
-1	1
1	1
-2	4
2	4
-3	9
3	9

x	$y = -x + 6$
0	6
1	5
2	4
-3	9



Exercício 7:

Representa a área, em metros quadrados, da parte relvada do terreno.

Exercício 8:

8.1.

Função de proporcionalidade direta: $f(x) = kx$

$$(5{,}6) \longrightarrow 6 = k \times 5 \Leftrightarrow k = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

$$(10{,}12) \longrightarrow 12 = k \times 10 \Leftrightarrow k = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

Verdadeiro, porque não obtivemos o mesmo valor para k (constante de proporcionalidade direta).

8.2.

Função de proporcionalidade inversa: $f(x) = \frac{k}{x}, x \neq 0$

$$(3{,}5) \longrightarrow 5 = \frac{k}{3} \Leftrightarrow k = 5 \times 3 = 15$$

$$(2{,}7) \longrightarrow 7 = \frac{k}{2} \Leftrightarrow k = 2 \times 7 = 14$$

Falso, porque obtivemos o mesmo valor para k (constante de proporcionalidade inversa).

8.3.

$$y = ax^2, a > 0$$

$$(1{,}6) \longrightarrow 6 = a \times 1^2 \Leftrightarrow a = \frac{6}{1} = 6$$

$$(2{,}5) \longrightarrow 5 = a \times 2^2 \Leftrightarrow a = \frac{5}{4}$$

Falso, porque não obtivemos o mesmo valor para a.

Exercício 9:

$y = \frac{k}{x}, x \neq 0$ é a expressão algébrica de uma função de proporcionalidade inversa, logo as variáveis são inversamente proporcionais.

Constante de proporcionalidade é $y \times x = k$

V1: D V2: D

Exercício 10:

$$f(x) = x^2$$

g é uma função de proporcionalidade inversa, logo é do tipo $g(x) = \frac{k}{x}, x \neq 0$

Os gráficos das funções intersetam-se no ponto de abcissa 2, como é conhecida a expressão algébrica da função f, vamos descobrir a ordenada desse ponto:

$$f(2) = 2^2 = 4$$

Os gráficos das funções intersetam-se no ponto $(2{,}4)$

Assim, $4 = \frac{k}{2} \Leftrightarrow k = 4 \times 2 \Leftrightarrow k = 8$

$$g(x) = \frac{8}{x}, x \neq 0$$

V1: C V2: A

Exercício 11:

$$A_{[OABC]} = \frac{\overline{OA} + \overline{CB}}{2} \times \overline{OC}$$

A ordenada do ponto C é igual à ordenada do ponto B:

$$f(2) = 2 \times 2^2 = 2 \times 4 = 8$$

Logo $B(2{,}8)$ e $C(0{,}8)$

Assim,

$$\overline{OC} = 8;\ \overline{OA} = 4\,;\overline{CB} = 2$$

$$A_{[OABC]} = \frac{4+2}{2} \times 8 = \frac{6}{2} \times 8 = 3 \times 8 = 24\ u.a.$$

Exercício 12:

12.1.

$$f(20) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

Logo o ponto $(20, \frac{1}{2})$ pertence ao gráfico da função.

V1: D V2: A

12.2.

O ponto P tem abcissa 5 e pertence ao gráfico da função f, logo:

$$f(5) = \frac{10}{5} = 2$$

Então $P(5{,}2)$.

O ponto P também pertence ao gráfico da função g que, sendo uma função linear, é do tipo:

$$g(x) = kx$$

$$2 = k \times 5 \Leftrightarrow k = \frac{2}{5}$$

Então $g(x) = \frac{2}{5}x$

12.3.

Como é um quadrado, $\overline{OA} = \overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CO} = a$

Então $B(a, a)$

Logo, $a = \frac{10}{a} \Leftrightarrow a^2 = 10 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{10}$

Como a é uma medida, então tem de ser positivo, logo $a = \sqrt{10}$

R: A medida exata é $\sqrt{10}$.

Exercício 13:

13.1.

$$\frac{70}{20} = 3{,}5 \text{ e } \frac{63}{18} = 3{,}5$$

Logo os lados são diretamente proporcionais: $\frac{\overline{QO}}{\overline{MO}} = \frac{\overline{PO}}{\overline{NO}}$. E o ângulo por eles formado é geometricamente igual:

$P\hat{O}Q \equiv M\hat{O}N$ porque são ângulos verticalmente opostos.

Logo $\Delta[POQ] \sim \Delta[NOM]$ pelo critério de semelhança LAL (lado- ângulo- lado)

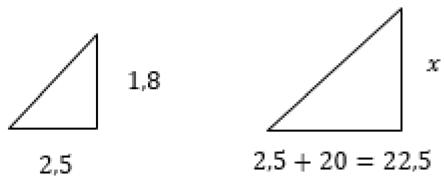
13.2.

$$\frac{70}{20} = \frac{\overline{PQ}}{25} \Leftrightarrow 20 \times \overline{PQ} = 70 \times 25 \Leftrightarrow \overline{PQ} = \frac{1750}{20} \Leftrightarrow \overline{PQ} = 87,5$$

R: O comprimento do lago é 87,5 metros.

Exercício 14:

$$\frac{22,5}{2,5}$$



$$\Leftrightarrow x = \frac{40,5}{2,5} \Leftrightarrow x = 16,2$$

R: A altura da bandeira é 16,2 metros.

3. Razões trigonométricas: calculadora e tabela.

Este momento da aula apenas irá realizar-se se os alunos demorarem menos tempo a passar a resolução da ficha de avaliação para o caderno diário do que era expetável.

Para este momento a professora utilizará uma apresentação PowerPoint previamente preparada para esta aula.

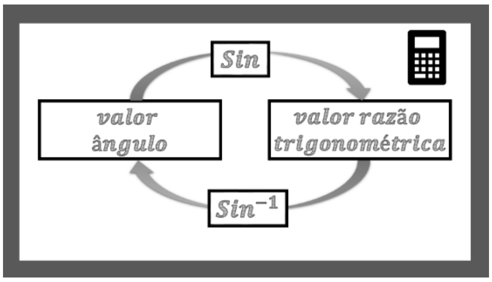
i. <u>Esclarecimento da utilização da calculadora</u>:

Antes de iniciar, a professora irá confirmar se os alunos têm a calculadora em graus. Para isso pedirá aos alunos que calculem a tangente de 45°. Àqueles alunos que não der o resultado 1, será feita a correção nas definições na calculadora.

Com a ajuda da apresentação PowerPoint a professora fará o esclarecimento da utilização da calculadora, fazemos as seguintes perguntas:

- ✓ "Procurem a tecla SIN ou SEN na vossa calculadora. Então vamos lá calcular o sen 35°"
- ✓ "Ou seja, ao conhecer o ângulo, descobrimos o valor da razão trigonométrica."

- ✓ "Então agora reparem no que está escrito em cima da tecla do seno?" Alguns alunos responderão SIN^{-1} ou SEN^{-1} ou $ARCSEN$ ou $ARCSIN$ pelo que será indicado que estas são todas maneiras válidas de representar a inversa da razão trigonométrica.
- ✓ "Se ao saber o ângulo, descobrimos o valor da razão usando a tecla SEN, o que acham que poderemos descobrir com a inversa?" Será expetável que os alunos respondam que é o valor do ângulo.
- ✓ "Então vamos lá calcular qual o ângulo que tem o valor do seno 0,7"
- ✓ Para saber qual a combinação de teclas a pressionar para obter SIN^{-1}, a professora poderá indicar as seguintes opções (conforme o modelo da calculadora):
  - SHIFT + SIN
  - 2nd + SIN
  - INV + SIN
- ✓ Para concluir, a professora utilizará o esquema seguinte para fazer uma síntese do que foi referido anteriormente, caso seja conhecido o ângulo utilizamos o SIN para descobrir o valor da razão trigonométrica; caso seja conhecido o valor da razão trigonométrica, utilizamos SIN^{-1} para descobrir o valor do ângulo.



ii. Resolução:

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Tal como é habitual, enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

Será indicado aos alunos que confirmem os resultados pelas soluções do manual. Caso haja alunos a terminar mais cedo relativamente à grande maioria da turma, será indicado que resolvam o exercício 9 do manual utilizando a calculadora e não a tabela como consta no enunciado.

Atividade 8:

8.1.

a) $sen\ 35° \approx 0{,}57$

b) $sen\ \alpha = 0{,}7, então\ \alpha = sen^{-1}(0{,}7) \approx 44{,}43°$

8.2.

a) $sen\ 64° \approx 0{,}899$

b) $cos\ 73° \approx 0{,}292$

c) $tg\ 21{,}3° \approx 0{,}390$

d) $sen\ 45° \approx 0{,}707$

e) $cos\ 60° \approx 0{,}500$

f) $tg\ 30{,}8° \approx 0{,}596$

8.3.

a) $sen\ \alpha = 0{,}531, então\ \alpha = sen^{-1}(0{,}531) \approx 32{,}1°$

b) $cos\ \alpha = \frac{3}{7}, então\ \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) \approx 64{,}6°$

c) $tg\ \alpha = 3{,}4, então\ \alpha = tg^{-1}(3{,}4) \approx 73{,}6°$

d) $sen\ \alpha = 0{,}001, então\ \alpha = sen^{-1}(0{,}001) \approx 0{,}1°$

e) $cos\ \alpha = 0{,}84, então\ \alpha = \cos^{-1}(0{,}84) \approx 32{,}9°$

f) $tg\ \alpha = 10000, então\ \alpha = tg^{-1}(10000) = 90{,}0°$

Exercício 9, página 48:

9.1.

a) $sen\ 85° \approx 0{,}99619 \approx 0{,}996$

b) $tg\ 63° \approx 1{,}96261 \approx 1{,}963$

d) $cos\ 21° \approx 0{,}93358 \approx 0{,}934$

9.2.

a) $tg\ \alpha = 0{,}869, então\ \alpha = tg^{-1}(0{,}869) \approx 41°$

b) $sen\ \alpha = 0{,}210, então\ \alpha = sen^{-1}(0{,}210) \approx 12°$

c) $cos\ \alpha = 0{,}377, então\ \alpha = \cos^{-1}(0{,}377) \approx 68°$

Exercício 58, página 58:

a) $sen\ 78° \approx 0{,}9781 \approx 0{,}98$

b) $tg\ 54° \approx 1{,}3764 \approx 1{,}38$

d) $1 - cos\ 60° = 1 - 0{,}5000 = 0{,}50$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- utilizar a calculadora devidamente, isto é, se lhe por pedido o ângulo cuja razão trigonométrica é uma fração, caso o aluno não utilize os parêntesis o resultado não será o correto;
- compreender quando utilizar a razão trigonométrica ou a sua inversa;
- fazer os arredondamentos quando a casa decimal que deverá sofrer alterações for 9, como é exemplo o 8.2. c) e o 8.3. f).

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora deverá:

- chamar à atenção de toda a turma que quando temos um número fracionário, os alunos deverão: ou calculam primeiro esse número fracionário e depois pedem à calculadora o valor da razão trigonométrica desse mesmo número, ou então, deverão escrever esse número entre parêntesis. Para ilustrar esta situação a professora utilizará como exemplo o exercício 8.3. b);
- perguntar: "O que é pedido?"; "O que é dado?"; a professora poderá ainda sugerir aos alunos que escrevam a razão trigonométrica que para que percebam como se relacionam os dados com o as perguntas;
- esclarecer que quando temos situações deste tipo, por exemplo $0,5895$ o número aproximado às milésimas deverá ser $0,590$, ou seja, fica o número seguinte ao 89, sendo que é necessário por o 0, dado que queremos uma aproximação às milésimas.

iii. Esclarecimento da utilização da tabela:

A professora entregará a tabela com os valores das razões trigonométricas para ângulos compreendidos entre 1 e 89 e explicará aos alunos como utilizá-la, utilizando como suporte a apresentação PowerPoint. Para isso, poderá fazer as seguintes perguntas:

- ✓ Como é que poderemos descobrir o seno de um ângulo com amplitude $35°$?
  Procuramos o número 35 na primeira coluna e depois observamos o valor do seno.
- ✓ Reparem nos valores dos graus na tabela? Será possível, através da tabela, calcular o valor do seno de um ângulo com amplitude de, por exemplo $27,3°$?
  Chamar a atenção dos alunos que a tabela apenas pode ser utilizada se o ângulo for um número natural entre 1 e 89.

- ✓ E agora, vamos procurar qual o ângulo que tem o valor do cosseno aproximadamente 0,88.

  Vamos à coluna do cosseno e procuramos o valor mais próximo de 0,88 e depois vemos a que ângulo corresponde.

Depois do breve esclarecimento, discutir as vantagens e desvantagens da utilização da tabela. Relativamente às desvantagens, poderá ser indicado aos alunos a falta de exatidão ao calcular o valor do ângulo, consequência de só haver ângulos de valores naturais.

A professora poderá aproveitar o momento para fazer referência à origem da tabela e da sua utilidade numa época em que a calculadora não existia.

Chamar-se-á à atenção dos alunos que deverão utilizar a tabela sempre que não for permitido o uso de calculadora.

iv. <u>Resolução da atividade 8, exercício 9 da página 48 e exercício 58 da página 64 através da tabela:</u>

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

Será indicado que os alunos realizem “trabalho autónomo”, expressão utilizada pela professora responsável pela turma que significa que os alunos vão resolvendo os exercícios e confirmando os resultados nas soluções do manual. Caso a sua solução não coincida com a do manual, o aluno deverá chamar pela professora afim de clarificar a sua dúvida.

Estes exercício e atividade deverão ser resolvidos com recurso à tabela trigonométrica, para que os alunos se familiarizem com a sua utilização, e deverão comparar a resolução feita com aquilo que fizeram com o auxílio da calculadora científica.

Caso seja necessário, a professora chamará à atenção para a correta utilização da notação matemática, nomeadamente em relação aos símbolos de " $\approx$ " e " $=$ ".

<u>Dificuldades:</u>

Não se prevê que os alunos tenham dificuldade em determinar as razões trigonométricas a partir do conhecimento do ângulo. Ao longo deste tipo de exercícios, o aluno poderá ter dificuldades em fazer os arredondamentos.

Porém, podem surgir dificuldades no processo contrário: saber o valor do ângulo a partir do valor da razão trigonométrica, uma vez que a tabela apenas apresenta os valores dos ângulos aproximados às unidades. Por exemplo, na alínea a) do exercício 8.2., ao recorrer à tabela, o aluno não encontrará nenhum valor do $seno = 0.531$, na tabela existe apenas $sen\, 31° \approx 0{,}5150$, $sen\, 32° \approx 0{,}5299$ e $sen\, 33° \approx 0{,}5446$, pelo que o aluno terá de escolher aquele que está mais próximo, o que neste caso é o ângulo de 32°.

Apoio a eventuais dificuldades:

Relativamente aos arredondamentos, a professora poderá recordar ao aluno as casas decimais bem como a regra utilizada para os arredondamentos.

No que concerne à utilização da tabela trigonométrica, a professora recordará aos alunos as limitações da tabela, indicando que é possível que seja pedido um valor que não esteja na tabela, pelo que deverão procurar aquele que tiver uma melhor aproximação. Nesse sentido, a professora poderá perguntar ao aluno: "Qual o valor que está mais perto desse?", reforçando a ideia de que o que é pedido é um valor aproximado.

4. Esclarecimento de dúvidas

Neste momento da aula, a professora perguntará aos alunos se houve dúvidas na resolução dos exercícios 55, 56 e 57 da página 64 do manual, exercícios esses que tinham sido indicados para consolidação das razões trigonométricas. A professora perguntará se há voluntários para ir apresentar a resolução no quadro, caso não hajam, será indicado um aluno.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES:

Uma vez que os alunos têm ritmos de trabalho diferentes, e para permitir que os alunos usem o tempo de aula de forma útil, será sugerido, aos alunos que tenham concluído o trabalho proposto, o exercício 1 do caderno de atividades (página 85); exercício 19 da página 53 do manual;

AVALIAÇÃO:

A avaliação incidirá nas dinâmicas de pares e no trabalho produzido pelas mesmas, bem como a respetiva participação nas sucessivas discussões. Ir-se-á avaliar o empenho dos alunos, o seu trabalho em aula e as principais dificuldades sentidas. Utilizar-se-ão as tabelas de participação e idas ao quadro, utilizadas regularmente nas aulas.

Anexo 27: Plano de aula do dia 28 de fevereiro de 2019

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias
Professoras-estagiárias: Débora Ferrage e Joana Dias

Data: 28/02/2019 Ano: 9.º Turma: B/C Duração: 90 minutos

LIÇÃO N.º: 102 e 103

ALUNOS EM FALTA:

SUMÁRIO:

- Razões trigonométricas: calculadora e tabela (continuação).
- Resolver triângulos retângulos.
- Resolução de exercícios e problemas.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS: Razões trigonométricas e resolução de problemas.

DOMÍNIO: Geometria e Medida 9 (GM 9).

SUBDOMÍNIO: Trigonometria

METODOLOGIA DA AULA: Trabalho autónomo a pares; Discussão e sistematização de ideias em grupo turma.

OBJETIVOS DA AULA: Resolução de problemas de contextos de realidade e/ou puramente matemáticos envolvendo as razões trigonométricas.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS: Razões trigonométricas.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS:

- Desenvolver a comunicação matemática dos alunos, sendo a comunicação escrita potenciada pelas resoluções que estes apresentam das tarefas propostas e a comunicação oral estimulada através da dinâmica do par onde estão inseridos e das discussões que serão promovidas em grupo turma;
- Desenvolver a capacidade de resolução de problemas no âmbito da trigonometria dado que se pretende que os alunos se familiarizem com os problemas desta unidade e consigam ganhar perspicácia e destreza, através da prática dos mesmos.

RECURSOS:

- Da professora: manual; tabelas de registo (participação e idas ao quadro); tabelas trigonométricas; apresentação PowerPoint.
- Do aluno: manual; caderno diário; calculadora científica.

MOMENTOS DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. (5 minutos)

   Formação dos grupos.
2. Razões trigonométricas: Calculadora e Tabela. (20 minutos)
   1. Esclarecimento sobre a utilização da calculadora;
   2. Resolução Atividade 8;
   3. Esclarecimento sobre a utilização da tabela trigonométrica;
   4. Resolução exercício 9.
3. Resolver triângulos retângulos. (20 minutos)
   1. Esclarecimento sobre o cálculo dos elementos de um triângulo retângulo;
   2. Resolução de exercícios;
   3. Apresentação da resolução.
4. Determinar distâncias a locais inacessíveis. (45 minutos)
   1. Resolução de problemas;
   2. Apresentação da resolução.

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. **5 minutos**

Formação dos grupos

Neste momento da aula, a professora irá indicar aos alunos que formem grupos (de dois ou três alunos), relembrando-os que o trabalho colaborativo tem como objetivo a entreajuda, possibilitando a discussão de resoluções e resultados.

2. Razões trigonométricas: calculadora e tabela. **20 minutos**

Para este momento a professora utilizará uma apresentação PowerPoint previamente preparada para esta aula.

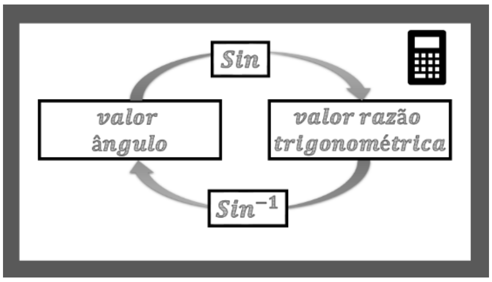
i. <u>Esclarecimento da utilização da calculadora</u>:

Antes de iniciar, a professora irá confirmar se os alunos têm a calculadora em graus. Para isso pedirá aos alunos que calculem a tangente de $45°$. Àqueles alunos que não der o resultado 1, será feita a correção nas definições na calculadora.

Com a ajuda da apresentação PowerPoint a professora fará o esclarecimento da utilização da calculadora, fazemos as seguintes perguntas:

- ✓ "Procurem a tecla SIN ou SEN na vossa calculadora. Então vamos lá calcular o $sen\ 35°$"
- ✓ "Ou seja, ao conhecer o ângulo, descobrimos o valor da razão trigonométrica."
- ✓ "Então agora reparem no que está escrito em cima da tecla do seno?" Alguns alunos responderão SIN^{-1} ou SEN^{-1} ou $ARCSEN$ ou $ARCSIN$ pelo que será indicado que estas são todas maneiras válidas de representar a inversa da razão trigonométrica.
- ✓ "Se ao saber o ângulo, descobrimos o valor da razão usando a tecla SEN, o que acham que poderemos descobrir com a inversa?" Será expetável que os alunos respondam que é o valor do ângulo.
- ✓ "Então vamos lá calcular qual o ângulo que tem o valor do seno 0,7"
- ✓ Para saber qual a combinação de teclas a pressionar para obter SIN^{-1}, a professora poderá indicar as seguintes opções (conforme o modelo da calculadora):
    - SHIFT + SIN
    - 2nd + SIN
    - INV + SIN

Para concluir, a professora utilizará o esquema seguinte para fazer uma síntese do que foi referido anteriormente, caso seja conhecido o ângulo utilizamos o SIN para descobrir o valor da razão trigonométrica; caso seja conhecido o valor da razão trigonométrica, utilizamos SIN^{-1} para descobrir o valor do ângulo.



ii. Resolução:

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Tal como é habitual, enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

Será indicado aos alunos que confirmem os resultados pelas soluções do manual. Caso haja alunos a terminar mais cedo relativamente à grande maioria da turma, será indicado que resolvam o exercício 9 do manual utilizando a calculadora e não a tabela como consta no enunciado.

Atividade 8:

8.1.

a) $sen\ 35° \approx 0{,}57$

b) $sen\ \alpha = 0{,}7, então\ \alpha = sen^{-1}(0{,}7) \approx 44{,}43°$

8.2.

a) $sen\ 64° \approx 0{,}899$

b) $cos\ 73° \approx 0{,}292$

c) $tg\ 21{,}3° \approx 0{,}390$

d) $sen\ 45° \approx 0{,}707$

e) $cos\ 60° \approx 0{,}500$

f) $tg\ 30{,}8° \approx 0{,}596$

8.3.

a) $sen\ \alpha = 0{,}531, então\ \alpha = sen^{-1}(0{,}531) \approx 32{,}1°$

b) $cos\ \alpha = \frac{3}{7}, então\ \alpha = \cos^{-1}\left(\frac{3}{7}\right) \approx 64{,}6°$

c) $tg\ \alpha = 3{,}4, então\ \alpha = tg^{-1}(3{,}4) \approx 73{,}6°$

d) $sen\ \alpha = 0{,}001, então\ \alpha = sen^{-1}(0{,}001) \approx 0{,}1°$

e) $cos\ \alpha = 0{,}84, então\ \alpha = \cos^{-1}(0{,}84) \approx 32{,}9°$

f) $tg\ \alpha = 10000, então\ \alpha = tg^{-1}(10000) = 90{,}0°$

Exercício 9, página 48:

9.1.

a) $sen\ 85° \approx 0{,}99619 \approx 0{,}996$

b) $tg\ 63° \approx 1{,}96261 \approx 1{,}963$

d) $cos\ 21° \approx 0{,}93358 \approx 0{,}934$

9.2.

a) $tg\ \alpha = 0{,}869, então\ \alpha = tg^{-1}(0{,}869) \approx 41°$

b) $sen\ \alpha = 0{,}210, então\ \alpha = sen^{-1}(0{,}210) \approx 12°$

c) $cos\ \alpha = 0{,}377, então\ \alpha = \cos^{-1}(0{,}377) \approx 68°$

Exercício 58, página 58:

a) $sen\ 78° \approx 0{,}9781 \approx 0{,}98$

b) $tg\ 54° \approx 1{,}3764 \approx 1{,}38$

d) $1 - cos\ 60° = 1 - 0{,}5000 = 0{,}50$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- utilizar a calculadora devidamente, isto é, se lhe por pedido o ângulo cuja razão trigonométrica é uma fração, caso o aluno não utilize os parêntesis o resultado não será o correto;
- compreender quando utilizar a razão trigonométrica ou a sua inversa;
- fazer os arredondamentos quando a casa decimal que deverá sofrer alterações for 9, como é exemplo o 8.2. c) e o 8.3. f).

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora deverá:

- chamar à atenção de toda a turma que quando temos um número fracionário, os alunos deverão: ou calculam primeiro esse número fracionário e depois pedem à calculadora o valor da razão trigonométrica desse mesmo número, ou então, deverão escrever esse número entre parêntesis. Para ilustrar esta situação a professora utilizará como exemplo o exercício 8.3. b);
- perguntar: "O que é pedido?"; "O que é dado?"; a professora poderá ainda sugerir aos alunos que escrevam a razão trigonométrica que para que percebam como se relacionam os dados com o as perguntas;
- esclarecer que quando temos situações deste tipo, por exemplo $0,5895$ o número aproximado às milésimas deverá ser $0{,}590$, ou seja, fica o número seguinte ao 89, sendo que é necessário por o 0, dado que queremos uma aproximação às milésimas.

iii. Esclarecimento da utilização da tabela:

A professora entregará a tabela com os valores das razões trigonométricas para ângulos com amplitude compreendida entre 1 e 89 e explicará aos alunos como utilizá-la, usando como suporte a apresentação PowerPoint. Para isso, poderá fazer as seguintes perguntas:

✓ Como é que poderemos descobrir o seno de um ângulo com amplitude $35°$?

Procuramos o número 35 na primeira coluna e depois observamos o valor do seno.

- ✓ Reparem nos valores dos graus na tabela? Será possível, através da tabela, calcular o valor do seno de um ângulo com amplitude de, por exemplo, 27,3°?

  Chamar à atenção dos alunos que a tabela apenas pode ser utilizada se o valor da amplitude ângulo for um número natural entre 1 e 89.

  Chamar à atenção dos alunos que a tabela só fornece valores aproximados, sendo que se for pedido o valor exato, a tabela não serve para o efeito.

- ✓ E agora, vamos procurar qual a amplitude do ângulo que tem o valor do cosseno aproximadamente igual a 0,88.

  Vamos à coluna do cosseno e procuramos o valor mais próximo de 0,88 e depois vemos a que amplitude do ângulo corresponde.

Depois do breve esclarecimento, discutir as vantagens e desvantagens da utilização da tabela. Relativamente às desvantagens, poderá ser indicado aos alunos a falta de exatidão ao calcular o valor da amplitude do ângulo, consequência de na tabela apenas constarem amplitudes naturais.

A professora poderá aproveitar o momento para fazer referência à origem da tabela e da sua utilidade numa época em que não existia a calculadora.

Chamar-se-á à atenção dos alunos que deverão utilizar a tabela sempre que não for permitido o uso de calculadora.

iv. <u>Resolução do exercício 9 da página 48:</u>

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

Será indicado que os alunos realizem "trabalho autónomo", expressão utilizada pela professora responsável pela turma que significa que os alunos vão resolvendo os exercícios e confirmando os resultados nas soluções do manual. Caso a sua solução não coincida com a do manual, o aluno deverá chamar pela professora afim de clarificar a sua dúvida.

Estes exercício e atividade deverão ser resolvidos com recurso à tabela trigonométrica, para que os alunos se familiarizem com a sua utilização, e deverão comparar a resolução feita com aquilo que fizeram com o auxílio da calculadora científica.

Caso seja necessário, a professora chamará à atenção para a correta utilização da notação matemática, nomeadamente em relação aos símbolos de " $\approx$ " e " $=$ ".

Dificuldades:

Não se prevê que os alunos tenham dificuldade em determinar as razões trigonométricas a partir do conhecimento do valor da amplitude do ângulo. Neste tipo de exercícios, o aluno poderá ter dificuldades em fazer os arredondamentos.

Porém, podem surgir dificuldades no processo contrário: saber o valor da amplitude do ângulo a partir do valor da razão trigonométrica, uma vez que a tabela apenas apresenta os valores dos ângulos aproximados às unidades.

Apoio a eventuais dificuldades:

Relativamente aos arredondamentos, a professora poderá recordar ao aluno como definir as casas decimais bem como a regra utilizada para os arredondamentos.

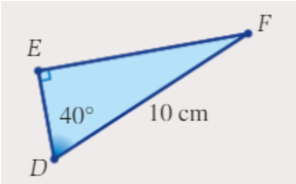
No que concerne à utilização da tabela trigonométrica, a professora recordará aos alunos as limitações da tabela, indicando que é possível que seja pedido um valor que não esteja na tabela, pelo que deverão procurar aquele que tiver uma melhor aproximação. Nesse sentido, a professora poderá perguntar ao aluno: “Qual o valor que está mais perto desse?”, reforçando a ideia de que o que é pedido é um valor aproximado.

3. Resolver triângulos retângulos – Calcular elementos de um triângulo retângulo 20 minutos

i. Esclarecimento:

A professora pedirá que alunos abram o manual na página 49 e começará por explicar o que é isto do “Resolver triângulos retângulos”.

- ✓ A professora indicará aos alunos que: “Resolver um triângulo retângulo é determinar o valor dos seus elementos.”
- ✓ De seguida perguntará se algum dos alunos sabe o que são os elementos de um triângulo. Para ajudar, a professora poderá dizer que são seis os elementos de um triângulo.
- ✓ Depois de uma possível discussão, a professora referirá que os seis elementos do triângulo são os seus três ângulos e os três lados.
- ✓ De seguida, a professora desenhará no quadro o seguinte triângulo e fará as seguintes perguntas:



Calcula $\overline{EF}$, arredondado às décimas.

- Quais são os dados do problema?
  - $E\widehat{D}F = 40°$
  - $\overline{DF} = 10\ cm$
  - O triângulo é retângulo em E.
- O que representa $\overline{DF}$ no triângulo?
  - A medida de comprimento hipotenusa
- E porque é que dizem que é a hipotenusa?
  - Porque é o lado do triângulo oposto ao ângulo reto.
- O que queremos determinar?
  - $\overline{EF}$
- O que representa $\overline{EF}$ no triângulo?
  - Cateto oposto ao ângulo em D.
- O que posso usar para determinar o valor de $\overline{EF}$?
  - A trigonometria.
- Que razão trigonométrica relaciona o cateto oposto ao ângulo dado com a hipotenusa?
  - O seno

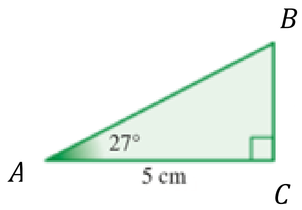
✓ Assim, a professora escreverá no quadro (pedindo a participação dos alunos)

- $sen\ 40° = \frac{\overline{EF}}{\overline{DF}} \Leftrightarrow sen\ 40° = \frac{\overline{EF}}{10} \Leftrightarrow \overline{EF} = 10 \times sen\ 40°$
- Utilizando a calculadora, $\overline{EF} \approx 6{,}4\ cm$

✓ Para concluir, a professora indicará as três perguntas-chave, também indicadas no manual, que os alunos devem fazer para a resolução dos exercícios e problemas que envolvem a trigonometria:

- Quais são os dados do problema?
- O que queremos determinar?
- Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com aquilo que pretendo saber?

✓ Caso a professora note que ainda existem dúvidas, percorrerá todos os passos anteriores, mas utilizando o triângulo seguinte:



Calcula $\overline{BC}$ arredondado às décimas.

- Quais são os dados do problema?
  - $B\hat{A}C = 27°$
  - $\overline{AC} = 5\ cm$
  - O triângulo é retângulo em C.
- O que representa $\overline{AC}$ no triângulo?
  - A medida do comprimento cateto adjacente ao ângulo em A
- O que pretendemos calcular?
  - $\overline{BC}$.
- O que representa $\overline{BC}$ no triângulo?
  - Cateto oposto ao ângulo em A.
- Que razão trigonométrica relaciona o cateto oposto ao ângulo em A com o cateto adjacente ao ângulo em A?
  - A tangente
- Assim a professora escreverá no quadro:
  -
  - Utilizando a calculadora, $\overline{BC} \approx 2{,}5\ cm$

ii. Resolução:

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Tal como é habitual, enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

iii. Apresentação da resolução:

A seleção dos grupos a apresentarem a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à escolha.

Atividade 10 da página 49:

10.1.

Resolvido no manual – exemplo.

10.2.

$$cos\ 60° = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow cos\ 60° = \frac{6}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} \times cos\ 60° = 6 \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{6}{cos\ 60°}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = 12\ cm$$

R: O comprimento *BC* tem 12 cm.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- preencher os espaços em branco através da observação da figura;
- saber que valor introduzir na calculadora de forma a obter o resultado pretendido.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar: "Então, olhando para o triângulo, qual é o comprimento do lado *BC*?"; "Quanto é o cosseno de 60º?"; "Como posso calcular esse comprimento?"; "Depois de calcular o cosseno de 60º, o exercício está terminado?"; "O que é preciso fazer mais?".

10.3.

$$tg\ 30° = \frac{\overline{ML}}{\overline{KL}} \Leftrightarrow tg\ 30° = \frac{\overline{ML}}{5} \Leftrightarrow tg\ 30° \times 5 = \overline{ML}, \qquad então\ \overline{ML} \approx 2{,}89\ m$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- compreender qual a razão trigonométrica que relaciona o comprimento que é dado, com o comprimento que é pedido;
- conseguir isolar o $\overline{ML}$;
- determinar $tg\ 30°$;
- arredondar às casas decimais pedidas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que:

- os alunos leiam a sugestão apresentada pelo manual para começar a responder à pergunta;
- os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar $\overline{ML}$?"; "Se 5 está a dividir como passa para o outro membro da equação?".

A professora deverá sugerir que:

- seja consultada a tabela trigonométrica ou utilizada a calculadora científica. A professora deverá perguntar: "Quero determinar o valor da tangente de um ângulo que já conheço, certo?"; "Então que tecla devo pressionar, na calculadora?".
- o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações.

10.4.

a) Resolvido no manual – exemplo.

b)

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AC}^2 = 6^2 + 7^2 \Leftrightarrow \overline{AC}^2 = 85 \Leftrightarrow \overline{AC} = \pm\sqrt{85}, então\ \overline{AC} \approx 9{,}2\ cm,$$
$$\overline{AC} > 0, porque\ é\ uma\ medida\ de\ comprimento$$

Pela trigonometria:

Pela alínea anterior $\widehat{A} \approx 40{,}6°$, então:

$$sen\ 40{,}6° = \frac{\overline{CB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow sen\ 40{,}6° = \frac{6}{\overline{AC}} \Leftrightarrow sen\ 40{,}6° \times \overline{AC} = 6 \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{6}{sen\ 40{,}6°}, \qquad então\ \overline{AC} \approx 9{,}2\ cm$$

Ou:

$$cos\ 40{,}6° = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow cos\ 40{,}6° = \frac{7}{\overline{AC}} \Leftrightarrow cos\ 40{,}6° \times \overline{AC} = 7 \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{7}{cos\ 40{,}6°}, \qquad então\ \overline{AC} \approx 9{,}2\ cm$$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- mobilizar corretamente o Teorema de Pitágoras;
- compreender qual a razão trigonométrica que relaciona o comprimento que é dado, com o comprimento que é pedido;
- conseguir isolar o $\overline{AC}$;
- determinar $sen/cos\ 40{,}6°$;
- arredondar às casas decimais pedidas.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora sugerirá que:

- os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: “Quais são os dados do problema?”; “O que queremos determinar?”; “Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?”.
- observem os exercícios anteriores afim de entenderem o raciocino envolvido.

A professora poderá perguntar: “Então como é que podemos isolar $\overline{AC}$?”; “Se $\overline{AC}$ está a dividir como passa para o outro membro da equação?”; “Depois dessa passagem, já está isolado?”; “O que é preciso fazer de seguida?”

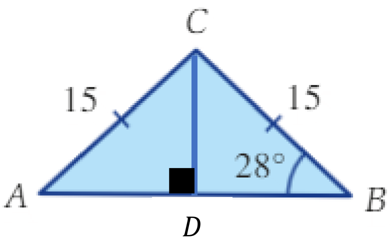
A professora deverá sugerir que:

- seja consultada a tabela trigonométrica ou utilizada a calculadora científica. A professora deverá perguntar: “Quero determinar o valor do cosseno (e seno) de um ângulo que já conheço, certo?”; “Então que tecla devo pressionar, na calculadora?”.
- o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações.

Exercício 13 da página 50:

Uma vez que o triângulo é isósceles, o ângulo *B* tem a mesma amplitude que o ângulo *A*, *logo*, $\widehat{A} = 28°$ (porque num triângulo a lados iguais opõem-se ângulos iguais). Dado que a soma dos ângulos internos de um triângulo é $180°$, temos $\widehat{C} = 180° - 2 \times 28° = 124°$.

A professora deverá ressalvar que este não é um triângulo retângulo, logo as razões trigonométricas não se podem aplicar. E poderá questionar: “Mas será que conseguimos, à custa dele obter um triângulo retângulo?" Sim, basta traçar uma perpendicular ao lado $[AB]$ a partir do vértice C, assim:



$$cos\ 28° = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AD}$$

$$= 15 \times cos\ 28°,$$

$$então\ \overline{AD}$$

$$\approx 13{,}2442$$

$$\overline{AB} = 2 \times \overline{AD} \approx 2 \times 13{,}2442 \approx 26{,}488 \approx 26{,}5$$

R: $\overline{AB}$ mede aproximadamente $26{,}5$ centímetros.

Dificuldades:

O aluno poderá aplicar as razões trigonométricas ou o Teorema de Pitágoras sem verificar se o triângulo é retângulo.

O aluno poderá não conseguir concluir que se o triângulo é isósceles, então a amplitude do ângulo no vértice B é igual à amplitude do ângulo no vértice A; não se recordar que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a $180°$.

O aluno poderá ter dificuldades em:

- identificar um triângulo retângulo no triângulo dado inicialmente e poderá não perceber que $\overline{AD} = \overline{DB}$;
- perceber que razão trigonométrica deverá utilizar tendo em conta os dados do problema e ainda ao resolver a equação;
- arredondar às casas decimais pedidas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá relembrar aos alunos que num triângulo isósceles, existem dois lados com mesmo comprimento, aos quais se opões dois ângulos com a mesma amplitude. De seguida poderá perguntar: "Se a amplitude do ângulo em B é $28°$ e em A também, então como iremos descobrir a amplitude do ângulo em C?" Caso os alunos não se recordem, a professora poderá ainda perguntar: "Qual a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo?"

Caso os alunos tenham dificuldade na escolha da razão trigonométrica, a professora deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?”; “Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?”.

Caso os alunos estejam a aplicar as razões trigonométricas ao triângulo isósceles, a professora poderá perguntar aos alunos, umas das primeiras condições referidas no início da lecionação da trigonometria, e esperar que sejam os alunos a responder: “Só podemos calcular as razões trigonométricas em triângulos retângulos”.

Caso os alunos não estejam a conseguir identificar um triângulo retângulo, a professora o desenhará no quadro, indicando aos alunos que devem traçar uma perpendicular a um dos lados convenientes do triângulo.

3. Determinar distâncias a locais inacessíveis – Resolver problemas 45 minutos

i. <u>Resolução</u>:

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Tal como é habitual, enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

ii. <u>Apresentação da resolução e discussão</u>:

Tal como tem sido habitual, a seleção dos grupos a apresentarem a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à escolha.

Atividade 14 da página 51:

14.1.

$tg\ 40° = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow tg\ 40° = \frac{\overline{CB}}{100} \Leftrightarrow \overline{CB} = tg\ 40° \times 100,\ \ então\ \overline{CB} \approx 83{,}90996 \approx 84\ m$

R: O rio tem aproximadamente 84 metros de largura.

É importante que a professora chame à atenção dos alunos que, uma vez que todos os vértices da figura estão nomeados, o lado que queremos saber deverá ficar designado com as letras do triângulo.

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- compreender qual a razão trigonométrica que relaciona o comprimento que é dado com o comprimento que é pedido;
- conseguir isolar o $\overline{CB}$;
- determinar $tg\ 40°$;
- arredondar às casas decimais pedidas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar $\overline{CB}$?"; "Se 100 está a dividir como passa para o outro membro da equação?".

A professora deverá sugerir que:

- seja consultada a tabela trigonométrica ou utilizada a calculadora científica. A professora deverá perguntar: "Quero determinar o valor do cosseno (e seno) de um ângulo que já conheço, certo?"; "Então que tecla devo pressionar, na calculadora?".
- o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações.

14.2.

a)

$$sen\ 20° = \frac{a}{400} \Leftrightarrow sen\ 20° \times 400 = a, \qquad então\ a \approx 136{,}80806 \approx 136{,}8\ m$$

R: Atinge aproximadamente 136,8 metros de altura.

b)

$$cos\ 20° = \frac{d}{400} \Leftrightarrow cos\ 20° \times 400 = d, \qquad então\ d \approx 375{,}87705 \approx 375{,}9\ m$$

R: A distância d mede aproximadamente 375,9 m.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- compreender qual a razão trigonométrica que relaciona o comprimento que é dado, com o comprimento que é pedido;
- conseguir isolar a incógnita;
- determinar $sen\ 20°$;
- arredondar às casas decimais pedidas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar a incógnita?"; "Se 400 está a dividir como passa para o outro membro da equação?".

A professora deverá sugerir que:

- seja consultada a tabela trigonométrica ou utilizada a calculadora científica. A professora deverá perguntar: "Quero determinar o valor do cosseno (e seno) de um ângulo que já conheço, certo?"; "Então que tecla devo pressionar, na calculadora?".
- o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações.

14.3.

$$d^2 = 400^2 - 136{,}8^2 \Leftrightarrow d^2 = 141285{,}76 \Leftrightarrow d = \pm\sqrt{141285{,}76} \Leftrightarrow d = \sqrt{141285{,}76}, \qquad d > 0, porque\ d\ é\ uma\ distância,$$

$$portanto\ d \approx 375{,}9\ m.$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em mobilizar o Teorema de Pitágoras.

O aluno poderá excluir a solução negativa sem a devida justificação.

Apoio a eventuais dificuldades:

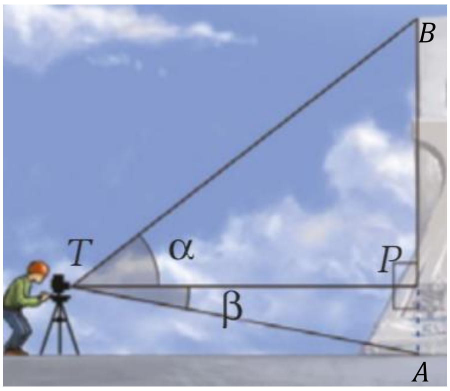
A professora deverá perguntar: "O que enuncia o Teorema de Pitágoras?"; "Como relaciona os lados de um triângulo retângulo?".

A professora deverá relembrar que uma equação da forma $x^2 = a$, com $a > 0$ admite sempre duas soluções, uma positiva e outra negativa, mas, dado que estamos a trabalhar com medidas de comprimento, deverá ser escolhida a positiva, dando esta mesma justificação.

14.4.

Façamos a representação dos triângulos à parte, atribuindo nomes aos vértices:

$\alpha = 39°;\ \beta = 9°;\ \overline{PT} = 60m$



$$tg\ \alpha = \frac{\overline{PB}}{\overline{PT}} \Leftrightarrow tg\ 39° = \frac{\overline{PB}}{60} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 60 \times tg\ 39° = \overline{PB}, \quad então$$

$$\overline{PB} \approx 48{,}587042\ m$$

$$tg\ \beta = \frac{\overline{PA}}{\overline{PT}} \Leftrightarrow tg\ 9° = \frac{\overline{PA}}{60} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 60 \times tg\ 9° = \overline{PA}, \quad então$$

$$\overline{PA} \approx 9{,}503066\ m$$

Então a altura do padrão dos descobrimentos é aproximadamente $\overline{PB} + \overline{PA} \approx 48{,}587042 + 9{,}503066 \approx 58{,}090108 \approx 58{,}09m$.

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

– compreender qual razão trigonométrica relaciona o comprimento que é dado, com o comprimento que é pedido.;
– compreender que a altura do monumento é obtida através da soma de $\overline{BP}$ com $\overline{PA}$;
– perceber quantas casas decimais deverá usar nos cálculos intermédios;
– conseguir isolar a incógnita;
– determinar as tangentes;
– arredondar às casas decimais pedidas.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora sugerirá que:

– os alunos nomeiem todos os vértices dos triângulos na figura, para mais facilmente serem designados os lados dos mesmos;
– sejam consultados os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou

ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "A altura do monumento é dada por que comprimento?"; "Como é que vou obter esse comprimento?".

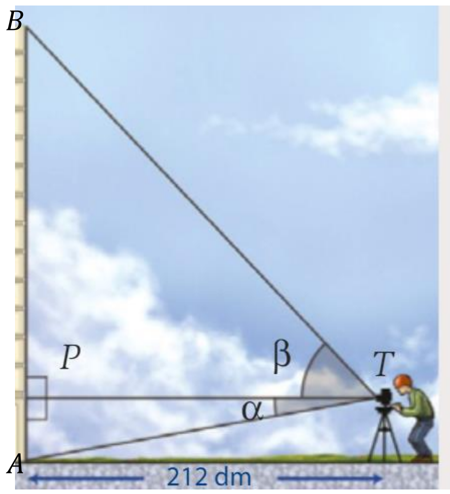
A professora deverá indicar aos alunos que nos cálculos intermédios deixem sempre mais duas casas decimais do que aquelas que são pedidas para o resultado final, assim, se para o resultado final pedem em décimas, os alunos deverão nos cálculos intermédios arredondar às milésimas. Isto se no enunciado não existir essa referência.

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar a incógnita?"; "Se 60 está a dividir como passa para o outro membro da equação?".

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações.

14.5.

Façamos a representação dos triângulos à parte, atribuindo nomes aos vértices:



$\hat{\alpha} = 16{,}5°$; $\hat{\beta} = 58{,}8°$; $\overline{PT} = 212\ dm$

$$tg\ \alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{PT}} \Leftrightarrow tg\ 16{,}5° = \frac{\overline{PA}}{212} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 212 \times tg\ 16{,}5° = \overline{PA},$$

$então$

$$\overline{PA} \approx 62{,}797\ dm$$

$$tg\ \beta = \frac{\overline{PB}}{\overline{PT}} \Leftrightarrow tg\ 58{,}8° = \frac{\overline{PB}}{212} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 212 \times tg\ 58{,}8° = \overline{PB}, \quad então$$

$$\overline{PB} \approx 350{,}054\ dm$$

Então a altura do edíficio é aproximadamente $\overline{PA} + \overline{PB} \approx 62{,}797 + 350{,}054 \approx 412{,}851 \approx 412{,}9\ dm.$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

– compreender qual razão trigonométrica relaciona o comprimento que é dado, com o comprimento que é pedido;

- compreender que a altura do monumento é obtida através da soma de dois cálculos envolvendo razões trigonométricas;
- perceber quantas casas decimais deverá deixar nos cálculos intermédios;
- conseguir isolar a incógnita;
- determinar as tangentes;
- arredondar às casas decimais pedidas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que:

- os alunos nomeiem todos os vértices dos triângulos na figura, para mais facilmente serem designados os lados dos mesmos;
- sejam consultados os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "A altura do monumento é dada por que comprimento?"; "Como é que vou obter esse comprimento?".

A professora deverá indicar aos alunos que nos cálculos intermédios deixem sempre mais duas casas decimais do que aquelas que são pedidas para o resultado final, assim, se para o resultado final pedem em décimas, os alunos deverão, nos cálculos intermédios, arredondar às milésimas. Isto se no enunciado não existir essa referência.

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar a incógnita?"; "Se 212 está a dividir como passa para o outro membro da equação?".

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações.

14.6.

a)

$$\begin{cases} tg\ 16° = \frac{h}{x+100} \\ tg\ 22° = \frac{h}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ 16°\ (100+x) = h \\ h = x \times tg\ 22° \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} tg\ 16°(100+x) = x \times tg\ 22° \\ - \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 100tg\ 16° + x \times tg\ 16° = x \times tg\ 22° \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 100tg\ 16° = x(tg\ 22° - tg\ 16°) \\ - \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{100tg\ 16°}{tg\ 22° - tg\ 16°} \\ - \end{cases}, \qquad então x \approx 245{,}2991;\ h \approx 99{,}101$$

A altura da montanha relativamente ao solo: $h + 1{,}5 \approx 100{,}601\ metros$

R: A altura da montanha relativamente ao nível do solo é aproximadamente $100{,}601$ metros.

b)

Basta somar $700m$ ao resultado obtido na alínea anterior.

Então, a altura da montanha em relação ao nível do mar é $100{,}601 + 700 \approx 800{,}601m$.

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- compreender qual razão trigonométrica relaciona o comprimento que é dado, com o comprimento que é pedido;
- compreender que a altura da montanha relativamente ao nível do solo é dada através da soma entre h e 1,5 $metros$;
- perceber o que a altura da montanha relativamente ao nível do mar é dada através da soma do valor obtido na alínea anterior com os $700\ metros$;
- resolver o sistema de duas equações, utilizando o método da substituição;
- determinar as tangentes;
- arredondar às casas decimais pedidas e não utilizar o valor arredondado às milésimas para as razões trigonométricas.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: “Quais são os dados do problema?”; “O que queremos determinar?”; “Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?”.

A professora poderá perguntar: “A altura da montanha é dada por que comprimento?”; “Como é que vou obter esse comprimento?”.

A professora deverá referir que a altura relativamente ao solo é a contar a partir do chão, e, portanto, neste caso deverá somar-se 1,5 ao resultado final na alínea a); enquanto que na alínea b), para além dos 1,5 metros, deverá somar-se os 700 metros de altitude referidos nessa mesma alínea.

A professora poderá indicar aos alunos que escrevam as razões trigonométricas para um dos triângulos. De seguida poderá perguntar quantas incógnitas a expressão tem. Pelo facto de ter duas incógnitas, deverá perguntar aos alunos quantas equações são necessárias para determinar os seus valores. Posteriormente, a professora poderá indicar aos alunos que tenham em contra o outro triângulo e que escrevam a equação para calcular o valor de h. Por fim, a professora relembrará que se trata da resolução de um sistema e, caso note que a maioria dos alunos não o sabem resolver, resolverá em grupo turma.

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES:

Uma vez que os alunos têm ritmos de trabalho diferentes, e para permitir estes usem o tempo de aula de forma útil, será sugerido, aos alunos que tenham concluído o trabalho proposto, os exercícios 19 ao 28 das páginas 53 e 54; exercícios 58 ao 71 das páginas 65 e 66.

AVALIAÇÃO:

A avaliação incidirá nas dinâmicas de pares e no trabalho produzido pelos mesmos, bem como a respetiva participação nas sucessivas discussões. Ir-se-á avaliar o empenho dos alunos, o seu trabalho em aula e as principais dificuldades sentidas. Utilizar-se-ão as tabelas de participação e idas ao quadro, recorrentes nas aulas

Será indicado a resolução dos exercícios 11 e 12, página 50 do manual, para trabalho de casa, a realizar numa folha à parte para feedback, bem como o resto das alíneas da atividade 14 que não sejam resolvidas em sala de aula.

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias
Professoras-estagiárias: Débora Ferrage e Joana Dias

Data: 11/03/2019 Ano: 9.º Turma: B/C Duração: 45 minutos

LIÇÃO N.º: 104

ALUNOS EM FALTA:

SUMÁRIO:

- Determinar distâncias a locais inacessíveis.
- Resolução de exercícios e problemas.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS: Razões trigonométricas e resolução de problemas.

DOMÍNIO: Geometria e Medida 9 (GM 9).

SUBDOMÍNIO: Trigonometria

METODOLOGIA DA AULA: Trabalho autónomo individual; Discussão e sistematização de ideias em grupo turma.

OBJETIVOS DA AULA: Resolução de problemas de contextos de realidade e/ou puramente matemáticos envolvendo as razões trigonométricas.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS: Razões trigonométricas.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS:

- Desenvolver a comunicação matemática dos alunos, sendo a comunicação escrita potenciada pelas resoluções que estes apresentam das tarefas propostas e a comunicação oral estimulada através das discussões que serão promovidas em grupo turma;
- Desenvolver a capacidade de resolução de problemas no âmbito da trigonometria dado que se pretende que os alunos se familiarizem com os problemas desta unidade e consigam ganhar perspicácia e destreza, através da prática dos mesmos.

RECURSOS:

- Da professora: manual; tabelas de registo (participação e idas ao quadro);
- Do aluno: manual; caderno diário; calculadora científica e/ou tabela trigonométrica.

MOMENTOS DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. (5 minutos)
2. Determinar distâncias a locais inacessíveis: (40 minutos)
   i. Resolução de problemas;
   ii. Apresentação da resolução.

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. **5 minutos**

Este é o momento de registar o sumário e as eventuais faltas dos alunos.

A professora recolherá as resoluções referentes ao TPC (exercício 13).

2. Determinar distâncias a locais inacessíveis – Resolver problemas **40 minutos**

i. Resolução:

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Tal como é habitual, enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os alunos possam ter.

ii. Apresentação da resolução e discussão:

Tal como tem sido habitual, a seleção dos alunos a apresentarem a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos mesmos. Caso não haja alunos voluntários, a professora procederá à escolha.

Atividade 14 da página 51:

14.1.

$tg\ 40° = \frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow tg\ 40° = \frac{\overline{CB}}{100} \Leftrightarrow \overline{CB} = tg\ 40° \times 100,\ \ então\ \overline{CB} \approx 83{,}90996 \approx 84\ m$

R: O rio tem aproximadamente 84 metros de largura.

É importante que a professora chame à atenção dos alunos que, uma vez que todos os vértices da figura estão nomeados, o lado que queremos saber deverá ficar designado com as letras do triângulo.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- compreender qual a razão trigonométrica que relaciona o comprimento que é dado com o comprimento que é pedido;
- conseguir isolar o $\overline{CB}$;
- determinar $tg\ 40°$;
- arredondar às casas decimais pedidas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar $\overline{CB}$?"; "Se 100 está a dividir como passa para o outro membro da equação?".

A professora deverá sugerir que:

- seja consultada a tabela trigonométrica ou utilizada a calculadora científica. A professora deverá perguntar: "Quero determinar o valor do cosseno (e seno) de um ângulo que já conheço, certo?"; "Então que tecla devo pressionar, na calculadora?".
- o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações.

14.2.

a)

$$sen\ 20° = \frac{a}{400} \Leftrightarrow sen\ 20° \times 400 = a, \qquad então\ a \approx 136{,}80806 \approx 136{,}8\ m$$

R: Atinge aproximadamente 136,8 metros de altura.

b)

$$cos\ 20° = \frac{d}{400} \Leftrightarrow cos\ 20° \times 400 = d, \qquad então\ d \approx 375{,}87705 \approx 375{,}9\ m$$

R: A distância d mede aproximadamente 375,9 m.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- compreender qual a razão trigonométrica que relaciona o comprimento que é dado, com o comprimento que é pedido;
- conseguir isolar a incógnita;
- determinar $sen\ 20°$;
- arredondar às casas decimais pedidas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar a incógnita?"; "Se 400 está a dividir como passa para o outro membro da equação?".

A professora deverá sugerir que:

- seja consultada a tabela trigonométrica ou utilizada a calculadora científica. A professora deverá perguntar: "Quero determinar o valor do cosseno (e seno) de um ângulo que já conheço, certo?"; "Então que tecla devo pressionar, na calculadora?".
- o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações.

14.3.

$$d^2 = 400^2 - 136{,}8^2 \Leftrightarrow d^2 = 141285{,}76 \Leftrightarrow d = \pm\sqrt{141285{,}76} \Leftrightarrow d = \sqrt{141285{,}76}, \qquad d > 0, porque\ d\ é\ uma\ distância, portanto\ d \approx 375{,}9\ m.$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em mobilizar o Teorema de Pitágoras.

O aluno poderá excluir a solução negativa sem a devida justificação.

Apoio a eventuais dificuldades:

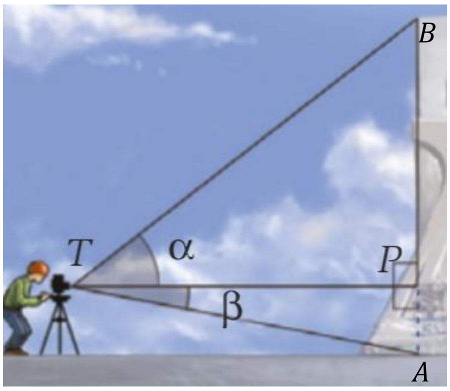
A professora deverá perguntar: "O que enuncia o Teorema de Pitágoras?"; "Como relaciona os lados de um triângulo retângulo?".

A professora deverá relembrar que uma equação da forma $x^2 = a$, com $a > 0$ admite sempre duas soluções, uma positiva e outra negativa, mas, dado que estamos a trabalhar com medidas de comprimento, deverá ser escolhida a positiva, dando esta mesma justificação.

14.4.

Façamos a representação dos triângulos à parte, atribuindo nomes aos vértices:

$\alpha = 39°;\ \beta = 9°;\ \overline{PT} = 60m$



$$tg\ \alpha = \frac{\overline{PB}}{\overline{PT}} \Leftrightarrow tg\ 39° = \frac{\overline{PB}}{60} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 60 \times tg\ 39° = \overline{PB}, \quad então$$

$$\overline{PB} \approx 48{,}587042\ m$$

$$tg\ \beta = \frac{\overline{PA}}{\overline{PT}} \Leftrightarrow tg\ 9° = \frac{\overline{PA}}{60} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 60 \times tg\ 9° = \overline{PA}, \quad então$$

$$\overline{PA} \approx 9{,}503066\ m$$

Então a altura do padrão dos descobrimentos é aproximadamente $\overline{PB} + \overline{PA} \approx 48{,}587042 + 9{,}503066 \approx 58{,}090108 \approx 58{,}09m$.

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- compreender qual razão trigonométrica relaciona o comprimento que é dado, com o comprimento que é pedido.;
- compreender que a altura do monumento é obtida através da soma de $\overline{BP}$ com $\overline{PA}$;
- perceber quantas casas decimais deverá usar nos cálculos intermédios;
- conseguir isolar a incógnita;
- determinar as tangentes;
- arredondar às casas decimais pedidas.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora sugerirá que:

- os alunos nomeiem todos os vértices dos triângulos na figura, para mais facilmente serem designados os lados dos mesmos;
- sejam consultados os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou

ainda deverá perguntar: “Quais são os dados do problema?”; “O que queremos determinar?”; “Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?”.

A professora poderá perguntar: “A altura do monumento é dada por que comprimento?”; “Como é que vou obter esse comprimento?”.

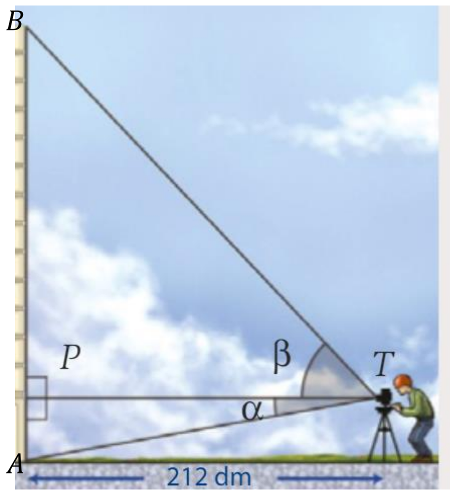
A professora deverá indicar aos alunos que nos cálculos intermédios deixem sempre mais duas casas decimais do que aquelas que são pedidas para o resultado final, assim, se para o resultado final pedem em décimas, os alunos deverão nos cálculos intermédios arredondar às milésimas. Isto se no enunciado não existir essa referência.

A professora poderá perguntar: “Então como é que podemos isolar a incógnita?”; “Se 60 está a dividir como passa para o outro membro da equação?”.

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações.

14.5.

Façamos a representação dos triângulos à parte, atribuindo nomes aos vértices:



$$\hat{\alpha} = 16{,}5°;\ \hat{\beta} = 58{,}8°;\ \overline{PT} = 212\ dm$$

$$tg\ \alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{PT}} \Leftrightarrow tg\ 16{,}5° = \frac{\overline{PA}}{212} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 212 \times tg\ 16{,}5° = \overline{PA},\ então$$

$$\overline{PA} \approx 62{,}797\ dm$$

$$tg\ \beta = \frac{\overline{PB}}{\overline{PT}} \Leftrightarrow tg\ 58{,}8° = \frac{\overline{PB}}{212} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 212 \times tg\ 58{,}8° = \overline{PB},\quad então$$

$$\overline{PB} \approx 350{,}054\ dm$$

Então a altura do edíficio é aproximadamente $\overline{PA} + \overline{PB} \approx 62{,}797 + 350{,}054 \approx 412{,}851 \approx 412{,}9\ dm$.

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

– compreender qual razão trigonométrica relaciona o comprimento que é dado, com o comprimento que é pedido;

- compreender que a altura do monumento é obtida através da soma de dois cálculos envolvendo razões trigonométricas;
- perceber quantas casas decimais deverá deixar nos cálculos intermédios;
- conseguir isolar a incógnita;
- determinar as tangentes;
- arredondar às casas decimais pedidas.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora sugerirá que:

- os alunos nomeiem todos os vértices dos triângulos na figura, para mais facilmente serem designados os lados dos mesmos;
- sejam consultados os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "A altura do monumento é dada por que comprimento?"; "Como é que vou obter esse comprimento?".

A professora deverá indicar aos alunos que nos cálculos intermédios deixem sempre mais duas casas decimais do que aquelas que são pedidas para o resultado final, assim, se para o resultado final pedem em décimas, os alunos deverão, nos cálculos intermédios, arredondar às milésimas. Isto se no enunciado não existir essa referência.

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar a incógnita?"; "Se 212 está a dividir como passa para o outro membro da equação?".

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações.

14.6.

a)

$$\begin{cases} tg\ 16° = \frac{h}{x+100} \\ tg\ 22° = \frac{h}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} tg\ 16°\ (100+x) = h \\ h = x \times tg\ 22° \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} tg\ 16°(100+x) = x \times tg\ 22° \\ - \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 100tg\ 16° + x \times tg\ 16° = x \times tg\ 22° \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 100tg\ 16° = x(tg\ 22° - tg\ 16°) \\ - \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{100tg\ 16°}{tg\ 22° - tg\ 16°}, \qquad então x \approx 245{,}2991;\ h \approx 99{,}101 \\ - \end{cases}$$

A altura da montanha relativamente ao solo: $h + 1{,}5 \approx 100{,}601\ metros$

R: A altura da montanha relativamente ao nível do solo é aproximadamente $100{,}601$ metros.

b)

Basta somar $700m$ ao resultado obtido na alínea anterior.

Então, a altura da montanha em relação ao nível do mar é $100{,}601 + 700 \approx 800{,}601m$.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- compreender qual razão trigonométrica relaciona o comprimento que é dado, com o comprimento que é pedido;
- compreender que a altura da montanha relativamente ao nível do solo é dada através da soma entre h e $1{,}5\ metros$;
- perceber o que a altura da montanha relativamente ao nível do mar é dada através da soma do valor obtido na alínea anterior com os $700\ metros$;
- resolver o sistema de duas equações, utilizando o método da substituição;
- determinar as tangentes;
- arredondar às casas decimais pedidas e não utilizar o valor arredondado às milésimas para as razões trigonométricas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: “Quais são os dados do problema?”; “O que queremos determinar?”; “Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?”.

A professora poderá perguntar: “A altura da montanha é dada por que comprimento?”; “Como é que vou obter esse comprimento?”.

A professora deverá referir que a altura relativamente ao solo é a contar a partir do chão, e, portanto, neste caso deverá somar-se 1,5 ao resultado final na alínea a);

enquanto que na alínea b), para além dos 1,5 metros, deverá somar-se os 700 metros de altitude referidos nessa mesma alínea.

A professora poderá indicar aos alunos que escrevam as razões trigonométricas para um dos triângulos. De seguida poderá perguntar quantas incógnitas a expressão tem. Pelo facto de ter duas incógnitas, deverá perguntar aos alunos quantas equações são necessárias para determinar os seus valores. Posteriormente, a professora poderá indicar aos alunos que tenham em contra o outro triângulo e que escrevam a equação para calcular o valor de h. Por fim, a professora relembrará que se trata da resolução de um sistema e, caso note que a maioria dos alunos não o sabem resolver, resolverá em grupo turma.

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES:

Uma vez que os alunos têm ritmos de trabalho diferentes, e para permitir estes usem o tempo de aula de forma útil, será sugerido, aos alunos que tenham concluído o trabalho proposto, os exercícios 11 e 12 da página 50, os exercícios 19 ao 28 das páginas 53 e 54; exercícios 58 ao 71 das páginas 64, 65 e 66.

AVALIAÇÃO:

A avaliação incidirá no trabalho individual produzido, bem como a respetiva participação nas sucessivas discussões. Ir-se-á avaliar o empenho dos alunos, o seu trabalho em aula e as principais dificuldades sentidas. Utilizar-se-ão as tabelas de participação e idas ao quadro, utilizadas regularmente nas aulas.

Anexo 29: Plano de aula do dia 12 de março de 2019

Plano de aula

COLÉGIO MILITAR
Fundado em 1803

Professora: Anabela Candeias
Professoras-estagiárias: Débora Ferrage e Joana Dias

DATA: **12/03/2019** **ANO:** **9.º** **TURMA:** **B/C** **DURAÇÃO:** **90 MINUTOS**

LIÇÃO N.º: 105 e 106

ALUNOS EM FALTA:

SUMÁRIO:

- Relações entre razões trigonométricas do mesmo ângulo.
- Resolução de exercícios e problemas.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS: Razões trigonométricas e relações daí decorrentes.
DOMÍNIO: Geometria e Medida 9 (GM 9).
SUBDOMÍNIO: Trigonometria

METODOLOGIA DA AULA: Trabalho autónomo a pares; Discussão e sistematização de ideias em grupo turma.

OBJETIVOS DA AULA: Familiarização com as relações entre as razões trigonométricas (Fórmula Fundamental da Trigonometria, entre outras).

CONHECIMENTOS PRÉVIOS: Razões trigonométricas; Teorema de Pitágoras; operações com frações.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS:

- Desenvolver a comunicação matemática dos alunos, sendo a comunicação escrita potenciada pelas resoluções que estes apresentam das tarefas propostas e a comunicação oral estimulada através da dinâmica do par onde estão inseridos e das discussões que serão promovidas em grupo turma;
- Desenvolver o raciocínio matemático dado que os alunos irão inferir, com o suporte de uma ficha de trabalho previamente preparada para o efeito, algumas relações entre as razões trigonométricas, nomeadamente a Fórmula Fundamental da Trigonometria.

RECURSOS:

- Da professora: manual; tabelas de registo (participação e idas ao quadro); fichas de trabalho; apresentação *PowerPoint*.
- Do aluno: manual; caderno diário; calculadora científica e tabelas trigonométricas.

MOMENTOS DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. (5 minutos)
   Formação dos grupos.

2. Relações entre as razões trigonométricas: (45 minutos)
    i. Resolução da ficha de trabalho n.º 13;
    ii. Apresentação da resolução;
    iii. Resolução da atividade 29 da página 55;
    iv. Discussão e sistematização de ideias.
3. Resolução de exercícios sobre relações entre as razões trigonométricas: (40 minutos)
    i. No cálculo de determinados valores exatos;
    ii. Na demonstração de algumas relações;
    iii. No cálculo de valores aproximados.

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. **5 minutos**

Formação dos grupos

Neste momento da aula, a professora irá indicar aos alunos que formem grupos (de dois ou três alunos), relembrando-os que o trabalho colaborativo tem como objetivo a entreajuda, possibilitando a discussão de resoluções e resultados.

2. Relação entre as razões trigonométricas. **45 minutos**

Será distribuída a ficha n.º 13 referente à Fórmula Fundamental da Trigonometria (FFT).

i. <u>Resolução da ficha de trabalho n.º 13</u>: **15 minutos**

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Tal como tem sido habitual, a seleção dos grupos a apresentarem a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos, e será realizada uma a uma à medida que a maioria dos alunos for terminando. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à sua escolha.

ii. <u>Apresentação da Resolução:</u> **15 minutos**

a)

Para um melhor entendimento, vamos indicar aos alunos que numerem os três triângulos, assim o triângulo $[ABC]$ será o 1, o triângulo $[DEF]$ será o 2 e o triângulo $[HIJ]$ o 3.

Triângulo 1

Tem-se $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = 8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289$ e $\overline{AC}^2 = 17^2 = 289$.

Assim, $\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2$

Portanto, usando o recíproco do Teorema de Pitágoras, conclui-se que o triângulo 1 ($[ABC]$) é retângulo em B.

Triângulo 2

Tem-se $\overline{EF}^2 + \overline{ED}^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169$ e $\overline{DF}^2 = 13^2 = 169$.

Assim, $\overline{EF}^2 + \overline{ED}^2 = \overline{DF}^2$

Portanto, usando o recíproco do Teorema de Pitágoras, conclui-se que o triângulo 2 ($[DEF]$) é retângulo em E.

Triângulo 3

Tem-se $\overline{HJ}^2 + \overline{JI}^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$ e $\overline{HI}^2 = 10^2 = 100$.

Assim, $\overline{HJ}^2 + \overline{JI}^2 = \overline{HI}^2$

Portanto, usando o recíproco do Teorema de Pitágoras, conclui-se que o triângulo 3 ($[HIJ]$) é retângulo em J.

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá considerar que os triângulos são retângulos pela observação do que parece ser um ângulo reto nas figuras.

O aluno poderá ter dificuldades em mobilizar o recíproco do Teorema de Pitágoras.

O aluno poderá confundir o Teorema de Pitágoras com o seu recíproco.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora deverá perguntar: “Quando tenho um triângulo, que conhecimento é que me permite garantir que esse mesmo triângulo é retângulo?” e evidenciar que não existe informação nas figuras que permita assumir que os triângulos possuem um ângulo reto; “Conhecem algum teorema que nos permita concluir que um triângulo é retângulo?”; “Qual o lado poderá ser considerado a hipotenusa? Porquê?”.

A professora deverá recordar com os alunos quando é que se usa o Teorema de Pitágoras ou o seu recíproco: o Teorema só pode ser aplicado quando sabemos que o triângulo é retângulo, enquanto que o seu recíproco permite garantir isso mesmo.

b)

- Determina as razões trigonométricas seno, cosseno e tangente de cada um dos ângulos assinalados na figura.

Triângulo 1

$$sen\alpha = \frac{8}{17}; cos\alpha = \frac{15}{17}; tg\alpha = \frac{8}{15}.$$

Triângulo 2

$$sen\beta = \frac{12}{13}; cos\beta = \frac{5}{13}; tg\beta = \frac{12}{5}.$$

Triângulo 3

$$sen\gamma = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}; cos\gamma = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}; tg\gamma = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

- Compara o valor da razão tangente com o quociente entre as razões seno e cosseno de cada ângulo. O que verificas?.

Triângulo 1

$$tg\alpha = \frac{8}{15} \ e \ \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{\frac{8}{17}}{\frac{15}{17}} = \frac{8}{15}$$

Triângulo 2

$$tg\beta = \frac{12}{5} \ e \ \frac{sen\beta}{cos\beta} = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$$

Triângulo 3

$$tg\gamma = \frac{3}{4} \ e \ \frac{sen\gamma}{cos\gamma} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}$$

Conseguimos perceber que o valor da tangente é igual ao quociente entre os valores do seno e do cosseno do ângulo correspondente.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- mobilizar as razões trigonométricas;
- conseguir traduzir o quociente pedido e, posteriormente, em operar com frações;
- relacionar os valores das razões trigonométricas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que os alunos consultem os seus registos sobre as razões trigonométricas.

A professora poderá perguntar:

- “Qual é o quociente pedido?”; “Como é que se dividem frações?”.
- “O que acabamos de ver?”; “O quociente entre o seno e cosseno é igual a que valor?”.

c)

Será apresentada a resolução no quadro o caso do primeiro triângulo, relativamente aos outros triângulos será apenas referido oralmente.

Triângulo 1

Já sabemos que:

$$sen\alpha = \frac{8}{17}; cos\alpha = \frac{15}{17}.$$

Elevando ao quadrado ambos os quocientes:

$$(sen\ \alpha)^2 = \left(\frac{8}{17}\right)^2; (cos\ \alpha)^2 = \left(\frac{15}{17}\right)^2.$$

Agora somando obtemos:

$$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = \left(\frac{8}{17}\right)^2 + \left(\frac{15}{17}\right)^2 = \frac{64}{289} + \frac{225}{289} = \frac{289}{289} = 1$$

Triângulo 2

Já sabemos que:

$$sen\,\beta = \frac{12}{13};\, cos\,\beta = \frac{5}{13}.$$

Elevando ao quadrado ambos os quocientes:

$$(sen\,\beta)^2 = \left(\frac{12}{13}\right)^2;\, (cos\;\beta)^2 = \left(\frac{5}{13}\right)^2.$$

Agora somando obtemos:

$$(sen\,\beta)^2 + (cos\,\beta)^2 = \left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} + \frac{25}{169} = \frac{169}{169} = 1$$

Triângulo 3

Já sabemos que:

– $(sen\,\alpha)^2 + (cos\,\alpha)^2 = 1$

– $(sen\,\beta)^2 + (cos\,\beta)^2 = 1$

– $(sen\,\gamma)^2 + (cos\;\gamma)^2 = 1$

Elevando ao quadra

$$(sen\,\gamma)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2;\, (cos\;\gamma)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2.$$

Agora somando obtemos:

$$(sen\,\gamma)^2 + (cos\;\gamma)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

Nos três triângulos podemos observar que a soma de o quadrado do seno com o quadrado do cosseno é igual a um.

<u>Sistematização:</u>

– $(sen\,\alpha)^2 + (cos\,\alpha)^2 = 1$

– $(sen\,\beta)^2 + (cos\,\beta)^2 = 1$

– $(sen\,\gamma)^2 + (cos\;\gamma)^2 = 1$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- elevar ao quadrado cada uma das razões trigonométricas;
- operar com frações, nomeadamente em calcular as potências e a sua soma;
- relacionar os quadrados do seno e do cosseno.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar:

- "$\left(\frac{8}{17}\right)^2 = \frac{8^2}{17}$?"; "Que cuidado devo ter para garantir que toda a fração elevada a 2?".
- "Como é que somam frações?"; "Como devemos proceder para conseguir somar as frações?".
- "O que conseguimos concluir com estes três cálculos?"

iii. Resolução da atividade 29 da página 55: **10 minutos**

A professora utilizará esta tarefa para generalizar aquilo que foi visto na ficha de trabalho, realizando-a em grande grupo com os alunos e apoiando-se numa apresentação PowerPoint. Depois deste momento, será entregue aos alunos a resolução da atividade para colarem no caderno diário.

a)

$$sen\ \alpha = \frac{b}{a}$$

$$cos\ \alpha = \frac{c}{a}$$

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}$$

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{a^2}$$

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

A professora deverá chamar à atenção que existe um passo intermédio que o manual não considera:

$$sen^2\alpha = \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{a^2}$$

$$cos^2\alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2}$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Perceber qual é a razão que traduz o seno e o cosseno de alfa;

- Compreender que deverá elevar ao quadrado cada uma das razões escritas anteriormente, e uma vez que se trata de uma fração, que deverá elevar ao quadrado tanto o numerador como o denominador;
- Conseguir escrever com o mesmo denominador o segundo membro da equação e
- Relacionar o que escreveu com o Teorema de Pitágoras e tendo em conta o triângulo representado.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora deverá sugerir aos alunos que, para além de lerem o texto referente a cada uma das passagens da demonstração:

- Observem o triângulo apresentado, verificando qual é o ângulo cujas razões trigonométricas são as pedidas e, se necessário, que consultem os registos que têm no caderno diário sobre as razões trigonométricas;
- Atentem para o primeiro membro da equação verificando o que se fez. A professora poderá perguntar: "Como se obtém o primeiro membro a partir de $sen\,\alpha$ e $cos\,\alpha$?"; "Tendo em conta isto, o que deverei escrever no segundo membro?"; "Como se calcula uma potência de uma fração?". Neste momento a professora deverá chamar à atenção de toda a turma a importância da colocação dos parêntesis porque esse cuidado evita erros desnecessários. A professora poderá dar um exemplo: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \neq \frac{2^2}{3}$.
- Adicionem ambas as frações, para isso a professora poderá questionar: "Como é que se adicionam frações?"; "Já tenho o mesmo denominador?"; "Se sim, o que preciso de fazer agora?";
- Apliquem o Teorema de Pitágoras. Caso os alunos não o consigam mobilizar, e se a professora achar necessário, recordá-lo-á em grande grupo. A professora poderá perguntar: "O que refere o Teorema de Pitágoras?"; "Então, já sei que o quadrado do comprimento hipotenusa é igual à soma do quadrado do comprimento dos catetos. Quais são os catetos e a hipotenusa neste triângulo?"; "Já consigo relacionar isso com a fração que tenho escrita?".

b)

Pelas definições das razões trigonométricas, tem-se:

$$sen\ \alpha = \frac{b}{a};\ cos\ \alpha = \frac{c}{a} \text{ e } tg\ \alpha = \frac{b}{c}.$$

Portanto:

$$\frac{sen\ \alpha}{cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} \times \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = tg\alpha$$

■

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- compreender que como esta tarefa é uma demonstração, que o resultado que queremos provar já está lá escrito e não pode ser utilizado, deverá sim, ser deduzido.
- perceber como deverá começar a demonstração.
- operar com frações, principalmente na operação divisão.

O aluno poderá ainda não:

- conseguir mobilizar as definições das razões trigonométricas ou associar que as definições das razões trigonométricas são o seno, cosseno e tangente de um ângulo.
- compreender que escrever as razões trigonométricas deverá utilizar o triângulo apresentado inicialmente.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora poderá começar por mencionar que esta tarefa é uma demonstração (como aparece em letras cor-de-rosa no canto da mesma), e, portanto, queremos provar que este resultado é verdadeiro, não o podendo assumir como tal, logo não o podemos utilizar na própria demonstração.

A professora poderá perguntar: “O que queremos provar?”; “Então vamos seguir a sugestão do livro e aplicar as definições das razões trigonométricas, que são?”.

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos que têm no caderno diário sobre as razões trigonométricas afim das conseguirem mobilizar.

A professora poderá questionar:

- “Já sabemos que o seno de um ângulo é o quociente entre a medida do comprimento do cateto oposto a esse ângulo e a medida do comprimento da hipotenusa, então, qual o cateto oposto ao ângulo alfa e qual é a hipotenusa?”; “Qual é a sua medida comprimento?”. (Analogamente para as restantes razões trigonométricas).

– “Como é que podemos dividir frações?”. A professora poderá ainda recordar como se procede nessa operação.

iv. Discussão e sistematização de ideias: **5 minutos**

Este momento servirá para que os alunos assentem as ideias relativamente àquilo que esteve a ser trabalhado, para isso, irão registar no caderno diário o seguinte:

Título: Relações entre as razões trigonométricas de um ângulo agudo α

Conhecida apenas uma das razões trigonométricas é possível determinar o valor das restantes.

- Relação entre o seno e o cosseno do mesmo ângulo:

$$\boxed{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

Fórmula Fundamental da Trigonometria (FFT)

- Relação entre o seno, cosseno e tangente de um mesmo ângulo:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

3. Resolução de exercícios sobre relações entre as razões trigonométricas. 40 minutos

i. Cálculo de determinados valores exatos: **15 minutos**

A professora utilizará o exemplo da página 56 do manual dos alunos para explicar-lhe a importância e utilidade da relação entre as razões trigonométricas. Assim, com o apoio da apresentação PowerPoint, ensinará a calcular os valores exatos de $cos\ \alpha$ e de $tg\ \alpha$, sabendo que α é um ângulo agudo e que $sen\ \alpha = \frac{5}{6}$.

De seguida, será um momento de aplicação e consolidação dos conteúdos lecionados, onde os alunos realizarão exercícios e problemas do manual.

Exercício 31 da página 56:

a) Utilizando a FFT, sai:

$$sen^2\alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow sen^2\alpha = 1 - \frac{1}{9} \Leftrightarrow sen^2\alpha = \frac{8}{9} \Leftrightarrow sen\alpha = \pm\sqrt{\frac{8}{9}}$$

$$\Leftrightarrow sen\alpha = \pm\frac{\sqrt{8}}{3}$$

Como o alfa é um ângulo agudo, o valor do seno terá de ser positivo, logo:

$$sen\alpha = \frac{\sqrt{8}}{3}$$

b) Utilizando a outra relação entre as razões trigonométricas, sai:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha} = \frac{\frac{\sqrt{8}}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{8}}{3} \times \frac{3}{1} = \sqrt{8}$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

– Compreender o que conhecimento deverá mobilizar para resolver a questão;

– Levantar a dois o cosseno de alfa, levantando somente o numerador;

– Perceber que se trata de uma equação que deverá resolver, sendo a incógnita o seno de alfa, tendo dificuldades na sua resolução, particularmente pelo facto de ter de operar com a subtração de frações e com a raiz quadrada.

O aluno poderá ainda:

- descartar a solução negativa sem a devida justificação.
- não apresentar a solução o mais simplificada possível.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar:

- "Que conhecimento é que me permite relacionar o valor do cosseno com o valor do seno de um mesmo ângulo?".
- "O que será elevado a dois?"; "Qual é o valor do cosseno (que será levantado a 2)?"; "$\frac{1^2}{3}$ é igual a $\left(\frac{1}{3}\right)^2$?".
- "O que quero determinar?"; "O seno de alfa é a minha incógnita, então o que devo fazer para a isolar?"; "Como posso subtrair frações?"; "Agora que conhecemos o quadrado de seno de alfa, como determinamos o seno de alfa?".
- "Qual solução deverei escolher: a positiva ou a negativa?"; "Porquê?".
- "A fração está o mais simplificada possível?". É importante a professora reforçar que, uma vez que não é pedido nenhuma aproximação, o aluno deverá deixar o valor exato, que neste caso contempla uma raiz quadrada. A professora poderá sugerir que os alunos contemplem as letras escritas a verde imediatamente antes do exercício 31, com o título *recorda*.

Exercício 34 da página 58:

Utilizando a FFT, sai:

$$sen^2\hat{L} + \cos^2\hat{L} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{21}{29}\right)^2 + \cos^2\hat{L} \ = 1 \Leftrightarrow \cos^2\hat{L} \ = 1 - \frac{441}{841}$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\hat{L} = \frac{400}{841} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow cos\,\hat{L} = \pm\sqrt{\frac{400}{841}} \Leftrightarrow cos\,\hat{L} = \pm\frac{20}{29}$$

Como o alfa é um ângulo agudo, o valor do cosseno terá de ser positivo, logo:

$$cos\hat{L} = \frac{20}{29}$$

Utilizando a relação entre as três razões trigonométricas de um ângulo agudo, sai:

$$tg\hat{L} = \frac{sen\,\hat{L}}{cos\,\hat{L}} = \frac{\frac{21}{29}}{\frac{20}{29}} = \frac{21}{29} \times \frac{29}{20} = \frac{21}{20}$$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

– Compreender o que conhecimento deverá mobilizar para resolver a questão;

– Levantar a dois o cosseno de L, levantando somente o numerador;

– Perceber que se trata de uma equação que deverá resolver, sendo a incógnita o seno de alfa, tendo dificuldades na sua resolução, particularmente pelo facto de ter de operar com a subtração de frações e com a raiz quadrada.

O aluno poderá ainda:

- descartar a solução negativa sem a devida justificação.
- não apresentar a solução o mais simplificada possível.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora poderá perguntar:

- "Que conhecimento é que me permite relacionar o valor do cosseno com o valor do seno de um mesmo ângulo?".
- "O que será elevado a dois?"; "Qual é o valor do cosseno (que será levantado a 2)?"; " $\frac{20^2}{29}$ é igual a $\left(\frac{20}{29}\right)^2$?".
- "O que quero determinar?"; "O seno de alfa é a minha incógnita, então o que devo fazer para a isolar?"; "Como posso subtrair frações?"; "Agora que conhecemos o quadrado de seno de alfa, como determinamos o seno de alfa?".

– “Qual solução deverei escolher: a positiva ou a negativa?”; “Porquê?”.

– “A fração está o mais simplificada possível?”. É importante a professora reforçar que, uma vez que não é pedido nenhuma aproximação, o aluno deverá deixar o valor exato, que neste caso contempla uma raiz quadrada. A professora poderá sugerir que os alunos contemplem as letras escritas a verde imediatamente antes do exercício 31, com o título *recorda*.

ii. <u>Na demonstração de algumas relações</u>: **15 minutos**

Dado que será a primeira vez que os alunos irão contactar com demonstrações envolvendo as relações entre as razões trigonométricas, a professora irá resolver, em conjunto-turma, a primeira alínea do exercício 43. A segunda alínea será feita pelos alunos, autonomamente, caso a professora perceba que esta está a gerar muita confusão, irá proceder à sua resolução em grande grupo.

Exercício 43 da página 58:

a) Esta alínea será resolvida em conjunto com os alunos

$$(sen\beta + cos\beta)^2 + (sen\beta - cos\beta)^2 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sen^2\beta + 2sen\beta cos\beta + \cos^2\beta + sen^2\beta - 2sen\beta cos\beta + \cos^2\beta = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{sen^2\beta + \cos^2\beta}_{\boxed{\text{FFT}}} + \underbrace{sen^2\beta + \cos^2\beta}_{\boxed{\text{FFT}}} = 2 \Leftrightarrow 1 + 1 = 2 \Leftrightarrow 2 = 2$$

■

b)

$$1 + tg^2\beta = \frac{1}{cos^2\beta} \Leftrightarrow 1 + \frac{sen^2\beta}{cos^2\beta} = \frac{1}{cos^2\beta} \Leftrightarrow \frac{cos^2\beta}{cos^2\beta} + \frac{sen^2\beta}{cos^2\beta} = \frac{1}{cos^2\beta}$$

$$\Leftrightarrow cos^2\beta + sen^2\beta = 1, \qquad porque\ cos^2\beta > 0$$

■

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

– Compreender o que conhecimento deverá mobilizar para resolver a questão;

– Recordar-se das relações entre as três razões trigonométricas;

– Colocar ambos os membros com o mesmo denominador;

– Eliminar os denominadores com a justificação devida;

– Concluir o pretendido.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora poderá perguntar:

- "Qual a fórmula que relaciona a tangente com o cosseno de um ângulo agudo?";
- "Como posso somar 1 com $\frac{sen^2 \beta}{cos^2 \beta}$?"
- "Qual a fórmula que relaciona o seno com o cosseno de um ângulo agudo?"

iii. <u>No cálculo de valores aproximados</u>: **10 minutos**

Neste momento da aula, a professora indicará aos alunos que, conhecido o valor de uma das razões trigonométricas de um ângulo agudo α é possível determinar, com a calculadora, valores aproximados das outras razões trigonométricas.

A professora ensinará aos alunos, sabendo que α é um ângulo agudo e $sen\ \alpha = \frac{2}{3}$, como calcular aproximadamente $cos\ \alpha$ e de $tg\ \alpha$, determinando previamente uma aproximação de α.

De seguida, será um momento de aplicação e consolidação dos conteúdos lecionados, onde os alunos realizarão exercícios e problemas do manual.

Exercício 32 da página 57:

32.1.

a) Utilizando a tecla sen^{-1} da calculadora:

$$sen\alpha = 0{,}86 \Leftrightarrow \alpha = sen^{-1}(0{,}86), então\ \alpha \approx 59°$$

b)

$$cos 59° \approx 0{,}5$$

c)

$$tg\alpha \approx 1{,}7$$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Recordar o que deverá fazer para obter o valor do ângulo, sabendo o valor da razão trigonométrica;
- Calcular o cosseno sabendo o valor da amplitude do ângulo;
- Fazer os arredondamentos com as casas pedidas.

O aluno poderá esquecer-se de colocar os graus.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar:

- "O que sabemos: o valor da amplitude do ângulo ou o valor da razão trigonométrica?"; "Que tecla da calculadora deveremos usar?".
- "Já sabemos qual é o valor do ângulo alfa?".
- "Que arredondamento pretendemos?".

32.2.

a) Utilizando a tecla cos^{-1} da calculadora:

$$cos\alpha = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \alpha = cos^{-1}\left(\frac{3}{4}\right), então\ \alpha \approx 41{,}4°$$

Então,

$$sen\alpha \approx sen\ 41{,}4° \approx 0{,}7$$

b) Utilizando a FFT, temos:

$$sen^2\alpha + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow sen^2\alpha = 1 - \frac{9}{16} \Leftrightarrow sen^2\alpha = \frac{7}{16} \Leftrightarrow sen\alpha = \pm\sqrt{\frac{7}{16}}$$

$$\Leftrightarrow sen\alpha = \pm\frac{\sqrt{7}}{4}$$

Como o alfa é um ângulo agudo, o valor do seno terá de ser positivo, logo:

$$sen\alpha = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Recordar o que deverá fazer para obter o valor do ângulo, sabendo o valor da razão trigonométrica;
- Calcular o cosseno sabendo o valor da amplitude do ângulo;
- Fazer os arredondamentos com as casas pedidas;
- Compreender o que conhecimento deverá mobilizar para resolver a questão;
- Levantar a dois o cosseno de alfa, levantando somente o numerador;
- Perceber que se trata de uma equação que deverá resolver, sendo a incógnita o seno de alfa, tendo dificuldades na sua resolução, particularmente pelo facto de ter de operar com a subtração de frações e com a raiz quadrada.

O aluno poderá ainda:

- esquecer-se de colocar os graus.
- descartar a solução negativa sem a devida justificação.
- não apresentar a solução o mais simplificada possível.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora poderá perguntar:

- "O que sabemos: o valor da amplitude do ângulo ou o valor da razão trigonométrica?"; "Que tecla da calculadora deveremos usar?".
- "Já sabemos qual é o valor do ângulo alfa?".
- "Que arredondamento pretendemos?".
- "Que conhecimento é que me permite relacionar o valor do cosseno com o valor do seno de um mesmo ângulo?".
- "O que será elevado a dois?"; "Qual é o valor do cosseno (que será levantado a 2)?"; " $\frac{3^2}{4}$ é igual a $\left(\frac{3}{4}\right)^2$?".
- "O que quero determinar?"; "O seno de alfa é a minha incógnita, então o que devo fazer para a isolar?"; "Como posso subtrair frações?"; "Agora que conhecemos o quadrado de seno de alfa, como determinamos o seno de alfa?".
- "Qual solução deverei escolher: a positiva ou a negativa?"; "Porquê?".
- "A fração está o mais simplificada possível?". É importante a professora reforçar que, uma vez que não é pedido nenhuma aproximação, o aluno deverá deixar o valor exato, que neste caso contempla uma raiz quadrada. A professora poderá sugerir que os alunos contemplem as letras escritas a verde imediatamente antes do exercício 31, com o título *recorda*.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES:

Uma vez que os alunos têm ritmos de trabalho diferentes, e para permitir estes usem o tempo de aula de forma útil, será sugerido, aos alunos que tenham concluído o trabalho proposto, os exercícios 33 ao 39 e o 43 da página 58 do manual.

AVALIAÇÃO:

A avaliação incidirá nas dinâmicas de pares e no trabalho produzido pelos mesmos, bem como a respetiva participação nas sucessivas discussões. Ir-se-á avaliar o empenho dos alunos, o seu trabalho em aula e as principais dificuldades sentidas. Utilizar-se-ão as tabelas de participação e idas ao quadro, utilizadas regularmente nas aulas.

Será indicado como TPC, que os alunos realizem o exercício 33 da página 58 e o 85 a) da página 69, numa folha à parte, a entregar na aula seguinte.

Anexo 30: Plano de aula do dia 14 de março de 2019

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias

Data: 14/03/2019 Ano: 9.º Turma: B/C Duração: 90 minutos

Professoras-estagiárias: Débora Ferrage e Joana Dias

LIÇÃO N.º: 107 e 108

ALUNOS EM FALTA:

SUMÁRIO:

- Relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares.
- Valores exatos das razões trigonométricas de ângulos de referência.
- Resolução de exercícios e problemas.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS: Razões trigonométricas e relações decorrentes.

DOMÍNIO: Geometria e Medida 9 (GM 9).

SUBDOMÍNIO: Trigonometria

METODOLOGIA DA AULA: Trabalho autónomo a pares; Discussão e sistematização de ideias em grupo turma.

OBJETIVOS DA AULA: Familiarização com a relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares; valores exatos das razões trigonométricas de ângulos de referência; aplicação e consolidação dos conhecimentos.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS: Razões trigonométricas; operar com frações; operar com radicais; propriedades de ângulos; Teorema de Pitágoras.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS:

- Desenvolver a comunicação matemática dos alunos, sendo a comunicação escrita potenciada pelas resoluções que estes apresentam das tarefas propostas e a comunicação oral estimulada através da dinâmica do par onde estão inseridos e das discussões que serão promovidas em grupo turma;

- Desenvolver o raciocínio matemático dado que os alunos irão inferir, com o suporte de uma ficha de trabalho previamente preparada para o efeito, a relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares;
- Desenvolver a capacidade de resolução de problemas em diversos contextos no âmbito da trigonometria.

RECURSOS:

- Da professora: manual; tabelas de registo (participação e idas ao quadro); apresentação *PowerPoint*.
- Do aluno: manual; caderno diário; calculadora científica e tabelas trigonométricas.

MOMENTOS DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. (5 minutos)
   Formação dos grupos.
2. Relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares: (15 minutos)
   i. Resolução da atividade 44 da página 59 do manual;
   ii. Sistematização de ideias.
3. Valores exatos das razões trigonométricas de ângulos de referência: (20 minutos)
   i. Resolução da atividade 45 e 46 das páginas 59 e 60 do manual;
   ii. Apresentação da resolução;
   iii. Discussão e sistematização de ideias.
4. Consolidação dos conteúdos lecionados: (50 minutos)
   i. Resolução de problemas;
   ii. Apresentação da resolução;

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. **5 minutos**

Formação dos grupos

Neste momento da aula, a professora irá indicar aos alunos que formem grupos (de dois ou três alunos), relembrando-os que o trabalho colaborativo tem como objetivo a entreajuda, possibilitando a discussão de resoluções e resultados.

2. Relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares. **15 minutos**

i. Resolução da atividade 44 da página 59: **10 minutos**

Esta atividade será resolvida pela professora em grande grupo com os alunos com o apoio de uma apresentação PowerPoint.

44.1.

O triângulo é retângulo, logo um dos ângulos, neste caso Â, tem como amplitude 90°. Dado que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°, $\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$, portanto, os dois ângulos são complementares.

44.2.

Uma vez que os dois ângulos são complementares, $\widehat{B} + \widehat{C} = 90°$.(1)

Se $\widehat{C} = \alpha$, então, substituindo em (1) $\widehat{B} + \alpha = 90°$, logo $\widehat{B} = 90° - \alpha$.

44.3.

$$sen(90° - \alpha) = sen\,\hat{B} = \frac{b}{a}$$

$$\cos\alpha = cos\widehat{C} = \frac{b}{a}$$

$$cos(90° - \alpha) = \cos\hat{B} = \frac{c}{a}$$

44.4.

Pode observar-se que o seno do ângulo em *B* é igual ao cosseno do ângulo em *C* e que o seno do ângulo em *C* é igual ao seno do ângulo em *B*.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Conseguir justificar por que razão os ângulos em *B* e em *C* são complementares; ou até mesmo em recordar-se da definição de ângulos complementares;
- Escrever qual a amplitude do ângulo pedida;
- Conseguir escrever as razões trigonométricas pedidas.

O aluno poderá não conseguir estabelecer a relação pretendida, e concluir, assim, o que se pretende.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá sugerir que os alunos:

- atentem no texto escrito a verde logo do lado direito da atividade, que recorda a definição de ângulos complementares. A professora poderá perguntar: "Qual é a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo?"; "Já conheço a amplitude de algum dos ângulos?"; "Se sim, qual? E quanto é essa amplitude?".
- escrevam, simbolicamente, a informação dada no enunciado, isto é, como nos diz que *ACB* tem de amplitude α, o aluno poderá escrever: $A\hat{C}B = \alpha$; depois a professora poderá sugerir que o aluno aplique a definição de complementaridade, ou seja, $A\hat{B}C + A\hat{C}B = 90° \Leftrightarrow A\hat{B}C + \alpha = 90°$; e, finalmente, a professora sugerirá que o aluno escreva em função do ângulo *ABC*, obtendo o pretendido.
- consultem os registos feitos no caderno diário acerca das razões trigonométricas a fim de que consigam mobilizar esses conhecimentos. A professora pode ainda perguntar: "Qual é a amplitude de $90° - \alpha$?".

A professora pode perguntar: "Então das razões trigonométricas escritas consegues relacioná-las de alguma forma?"; "Como?".

ii. Sistematização de ideias: **5 minutos**

A professora dirá aos alunos que abram o seu caderno diário para registarem o seguinte:

Título: Relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares

- O seno de um ângulo agudo de amplitude α é igual ao cosseno do seu ângulo complementar, isto é, $sen\ \alpha = cos(90° - \alpha)$.
- O cosseno de um ângulo agudo de amplitude α é igual ao seno do seu ângulo complementar, isto é, $cos\ \alpha = sen\ (90° - \alpha)$.

Curiosidade: Etimologicamente, cosseno significa seno do complementar (co-seno).

3. Valores exatos das razões trigonométricas de ângulos de referência. 20 minutos

i. Resolução da atividade 45 e 46 das páginas 59 e 60 do manual: **10 minutos**

Neste momento, os alunos realizarão a atividade 45 em trabalho autónomo. Tal como é habitual, enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter e aproveitará o momento para recolher o trabalho de casa enviado na aula anterior.

Relativamente à atividade 46 será resolvida pela professora em grande grupo com o apoio de uma apresentação PowerPoint.

ii. Apresentação da Resolução: **10 minutos**

A seleção dos grupos a apresentarem a resolução da atividade 45 no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à sua escolha.

Atividade 45 da página 59 do manual

a)

Uma vez que o triângulo é retângulo, tem um ângulo de amplitude $90°$, e sabe-se que o ângulo em A tem de amplitude $45°$, o outro ângulo, o que sobra, forçosamente terá de amplitude $45°$ também, dado que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é $180°$. Como o ângulo em A tem a mesma amplitude que o ângulo em C, conclui-se que $\overline{BC} = \overline{AB} = 1$ (a ângulos iguais opõem-se lados iguais).

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 1^2 + 1^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow \overline{AC} = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow \overline{AC} = \sqrt{2},$$

$\overline{AC} > 0$, porque $\overline{AC}$ é um comprimento. ■

b)

Uma vez que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é $180°$ e como o triângulo é causa é retângulo, significa que tirando o ângulo reto ficam a sobrar $90°$. Acrescentando o facto de o triângulo ser isósceles (a lados iguais opõem-se ângulos iguais), as amplitudes dos restantes ângulos serão também iguais, logo $45°$.

c)

$$sen 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$tg45° = \frac{1}{1} = 1$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- conseguir determinar o valor dos comprimentos dos lados do triângulo, seja por não conseguir mobilizar o Teorema de Pitágoras, seja por não conseguir argumentar o suficiente para garantir que o triângulo é isósceles;
- recordar que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°;
- conseguir escrever as razões trigonométricas pedidas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar:

- "Como podemos determinar a medida de comprimento desconhecido de um dos lados de um triângulo retângulo?"; "Como posso garantir que a medida do comprimento do lado *BC* é efetivamente 1?"; "Que informações temos sobre o triângulo?".
- "Qual é a soma dos ângulos internos de um triângulo?"; "Como é que essa informação nos ajuda a resolver esta questão?".

A professora poderá sugerir que os alunos consultem os registos feitos no caderno diário acerca das razões trigonométricas a fim de que consigam mobilizar esses conhecimentos.

Atividade 46 da página 60 do manual

46.1.

Por definição, a altura [CM] é perpendicular a [AB]. Assim o triângulo [AMC] é retângulo em *M*.

Por outro lado, como o triângulo [ABC] é equilátero, todos os seus ângulos têm a mesma amplitude (60°) e, portanto, o ângulo em *A* tem amplitude 60°.

Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°, tendo em conta os dois pontos anteriores, tem-se que o ângulo $A\hat{C}M$ tem amplitude 30° .

46.2.

Como [AC] e [BC] têm o mesmo comprimento, sabemos que a altura [CM] divide o lado [AB] em dois segmentos com o mesmo comprimento. Como $\overline{AB} = 2$, temos que [AM] e [BM] têm comprimento 1.

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 1^2 + MC^2 = 2^2 \Leftrightarrow 3 = \overline{MC}^2 \Leftrightarrow \overline{MC} = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow \overline{MC} = \sqrt{3},$$

$\overline{MC} > 0$, porque $\overline{MC}$ é um comprimento. ■

46.3.

b)

$$sen60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c)

$$cos60° = \frac{1}{2}$$

d)

$$tg60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- conseguir determinar o valor dos comprimentos dos lados do triângulo, seja por não conseguir mobilizar o Teorema de Pitágoras, seja por não conseguir argumentar o suficiente para garantir que o triângulo é isósceles.
- recordar que a soma das amplitudes ângulos internos de um triângulo é 180°.
- conseguir escrever as razões trigonométricas pedidas.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar:

- "Como podemos determinar o comprimento desconhecido de um dos lados de um triângulo retângulo?"; "Como posso garantir que o comprimento do lado *BM* é efetivamente 1?"; "Que informações temos sobre o triângulo?";

– “Qual é a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo?”; “Como é que essa informação nos ajuda a resolver esta questão?”.

A professora poderá sugerir que os alunos consultem os registos feitos no caderno diário acerca das razões trigonométricas a fim de que consigam mobilizar esses conhecimentos.

iii. Sistematização de ideias: **5 minutos**

A professora dirá aos alunos que abram o seu caderno diário para registarem o seguinte:

Título: Valores exatos das razões trigonométricas de ângulos de referência

	$30°$	$45°$	$60°$
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

4. Consolidação da matéria lecionada. **50 minutos**

i. Resolução de exercícios e problemas:

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Tal como é habitual, enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

ii. Apresentação da resolução e discussão:

Tal como tem sido habitual, a seleção dos grupos a apresentarem a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Será realizada à medida que os alunos forem realizando as atividades. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à sua escolha.

Exercício 74 da página 66:

a)

1º Processo:

$$cos\ 45° = \frac{3\sqrt{2}}{x} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{\cos 45°} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = 3 \times 2$$

$$\Leftrightarrow x = 6cm$$

2º Processo:

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\left(3\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 = x^2 \Leftrightarrow 2\left(3\sqrt{2}\right)^2 = x^2 \Leftrightarrow 2 \times 9 \times 2 = x^2 \Leftrightarrow 36 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 6\ cm, \qquad porque\ x > 0\ por\ ser\ uma\ medida\ de\ comprimento$$

Resolução alternativa:

Atendendo ao facto de o triângulo ser isósceles, tem-se que os ângulos são complementares, logo,

$\cos(\hat{A}) = sen(90 - \hat{A})$

$$sen\ 45° = \frac{3\sqrt{2}}{x} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{\text{sen}\ 45°} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \times 2 \Leftrightarrow x = 6cm$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar as incógnitas;
- Determinar o valor exato pedido em ambos os casos.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: “Quais são os dados do problema?”; “O que queremos determinar?”; “Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?”.

A professora poderá perguntar:

- “Então como é que podemos isolar x?”;
- “Qual é o valor exato da razão trigonométrica com o ângulo indicado?”.

b)

$$tg\ 60° = \frac{x}{5} \Leftrightarrow x = 5 \times tg\ 60° \Leftrightarrow x = 5 \times \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 5\sqrt{3}cm$$

$$cos\ 60° = \frac{5}{y} \Leftrightarrow y = \frac{5}{cos60°} \Leftrightarrow y = \frac{5}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow y = 5 \times \frac{2}{1} \Leftrightarrow y = 10cm$$

<u>Resolução alternativa:</u>

Atendendo ao facto de o triângulo ser isósceles, tem-se que os ângulos são complementares, logo,

$cos(\hat{A}) = sen(90 - \hat{A})$

$$sen\ 30° = \frac{5}{y} \Leftrightarrow y = \frac{5}{sen30°} \Leftrightarrow y = \frac{5}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow y = 5 \times \frac{2}{1} \Leftrightarrow y = 10cm$$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar as incógnitas;
- Determinar o valor aproximado pedido em ambos os casos.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: “Quais são os dados do problema?”; “O que queremos determinar?”; “Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?”.

A professora poderá perguntar:

- “Então como é que podemos isolar x?”;
- “Qual é o valor exato da razão trigonométrica com o ângulo indicado?”.

Exercício 61 da página 65:

Para realizar este problema, assumiremos que o peso do guindaste realiza uma perpendicular com a sua base, formando assim um ângulo de amplitude 90° entre o comprimento y e o comprimento x.

$$cos\ 38° = \frac{x}{8,5} \Leftrightarrow cos38° \times 8,5 = x, \qquad então\ x \approx 6,7m$$

$$sen\ 38° = \frac{y}{8,5} \Leftrightarrow sen\ 38° \times 8,5 = y, \qquad então\ y \approx 5,2m$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar as incógnitas;
- Determinar o valor aproximado pedido em ambos os casos.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar $x(ou\ y)$?";

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

Exercício 62 da página 65:

A altura do poste será designada com a letra h, temos então:

$$tg\ 70° = \frac{h}{4} \Leftrightarrow 84 \times tg\ 70° = h, \qquad então\ h \approx 11\ m$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Conseguir compreender o que representa a altura do poste no triângulo retângulo;
- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar a incógnita h;
- Determinar o valor aproximado pedido.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar: “O que representa a altura do poste no triângulo que nos é apresentado?”; “Que nome tem esse comprimento?”.

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: “Quais são os dados do problema?”; “O que queremos determinar?”; “Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?”.

A professora poderá perguntar: “Então como é que podemos isolar h?”;

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

Exercício 63 da página 65:

63.1.

$$tg\ \alpha = \frac{3}{1,5} \Leftrightarrow tg\ \alpha = 2 \Leftrightarrow \alpha = arctg(2), \qquad então\ \alpha \approx 63°$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Entender que a base do triângulo é o maior comprimento do retângulo representado;
- Entender que a altura do triângulo resulta da subtração da altura total da casa com a altura até ao telhado;
- Conseguir isolar α;
- Determinar o valor aproximado pedido.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar: “Queremos determinar o ângulo α, que medidas conhecemos do triângulo retângulo representado?”.

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: “Quais são os dados do problema?”; “O que queremos determinar?”; “Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?”.

A professora poderá perguntar:

- “Qual é o comprimento da base do triângulo?”; “Qual é o comprimento da altura do triângulo?”; “Como posso obter esse comprimento?”.
- “Então como é que podemos isolar α?”; “Qual é a tecla da calculadora que permite fazer essa operação?”.

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

63.2.

a) Pela trigonometria:

$$sen\ 63° = \frac{3}{x} \Longrightarrow sen\ 63° \times x = 3 \Longrightarrow x = \frac{3}{sen\ 63°}, \qquad então\ x \approx 3{,}4m$$

Resolução alternativa

$$cos\ 63° = \frac{1{,}5}{x} \Longrightarrow cos\ 63° \times x = 1{,}5 \Longrightarrow x = \frac{1{,}5}{cos\ 63°}, \qquad então\ x \approx 3{,}3m$$

A professora poderá alertar para o facto de se obterem dois valores diferentes utilizando diferentes razões trigonométricas. Isto acontece uma vez que o valor da amplitude ângulo que se está a utilizar já é uma aproximação muito “grosseira” (unidades) ao valor da amplitude do ângulo, então, já se perdeu algum rigor para este valor.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar x;

– Determinar o valor aproximado pedido.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar x?".

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

63.2.

b) Pelo Teorema de Pitágoras:

$$1{,}5^2 + 3^2 = x^2 \Leftrightarrow 2{,}25 + 9 = x^2 \Leftrightarrow x^2 = 11{,}25 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{11{,}25},$$

$$então\ x \approx 3{,}4m$$

$$porque\ x > 0\ dado\ que\ \ x\ é\ uma\ medida$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

– Mobilizar o Teorema de Pitágoras;

– Determinar o valor aproximado pedido;

O aluno poderá descartar a solução negativa sem a devida justificação.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar: "O que enuncia o Teorema de Pitágoras?"; "Qual é o nome do comprimento que queremos determinar?";

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

A professora poderá perguntar: "Ambas as soluções nos interessam para este problema?"; "Qual é que posso descartar?"; "Porquê?".

Exercício 64 da página 65:

a)

$$sen\ \alpha = \frac{8}{10} \Leftrightarrow sen\ \alpha = 0{,}8 \Leftrightarrow \alpha = arcsen(0{,}8), \qquad então\ \alpha \approx 53°$$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar α;
- Determinar o valor aproximado pedido.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar α?"; "Qual é a tecla da calculadora que permite fazer essa operação?".

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

b)

$$sen\ 58° = \frac{8}{d} \Leftrightarrow sen\ 58° \times d = 8 \Leftrightarrow d = \frac{8}{sen\ 58°}, \qquad então\ d \approx 9{,}4m$$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar d;
- Determinar o valor aproximado pedido.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar d?".

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

Exercício 65 da página 65.

a)

$$tg\ 55° = \frac{16}{x} \Leftrightarrow tg\ 55° \times x = 16 \Leftrightarrow x = \frac{16}{tg\ 55°}, \qquad então\ x \approx 11{,}2m$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar x;
- Determinar o valor aproximado pedido.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar x?".

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

b)

$$sen\,\alpha = \frac{16}{18} \Rightarrow sen\,\alpha \approx 0{,}889 \Rightarrow \alpha \approx arcsen(0{,}889), \qquad então\ \alpha \approx 63°$$

A professora chamará à atenção dos alunos que o trapézio é escaleno, logo o valor da amplitude do ângulo alfa será diferente de $55°$.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Obter um triângulo retângulo conveniente que permita determinar a amplitude do ângulo alfa;
- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar α;
- Saber quantas casas decimais deve preservar nos cálculos intermédios;
- Determinar o valor aproximado pedido.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar: "Como consigo obter um triângulo retângulo de forma a que o ângulo alfa esteja incluído?". A professora poderá sugerir que os alunos representem à parte esse mesmo triângulo para que seja mais fácil a visualização por parte dos alunos.

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar α?"; "Qual é a tecla da calculadora que permite fazer essa operação?".

A professora recordará aquilo que já foi referido: quando nada é mencionado no enunciado em relação ao número de casas decimais a serem preservadas nos cálculos intermédios, os alunos deverão deixar pelo menos 3 casas decimais, de forma a que o resultado seja a melhor aproximação possível.

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

Exercício 66 da página 65.

a)

$$cos\ 66° = \frac{4,5}{l} \Leftrightarrow cos\ 66° \times l = 4,5 \Leftrightarrow l = \frac{4,5}{cos\ 66°}, \qquad então\ l \approx 11m$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Compreender qual é o triângulo retângulo que permite utilizar as razões trigonométricas;
- Entender as implicações advindas do facto do triângulo ser isósceles (base do triângulo retângulo e dois ângulos iguais);
- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar l;
- Determinar o valor aproximado pedido.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar: "Posso aplicar as razões trigonométricas no triângulo representado?"; "Porquê?"; "Qual é o triângulo em que posso utilizar as razões trigonométricas?".

A professora poderá perguntar: "Este triângulo é isósceles, então o que sabemos acerca de dois dos seus ângulos e dos lados correspondentes?".

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar l?".

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

b)

$$A_{triângulo} = \frac{9 \times x}{2}$$

x é a altura do triângulo que pode ser determinada através da trigonometria:

$$tg\ 66° = \frac{x}{4,5} \Leftrightarrow 4,5 \times tg\ 66° = x, \qquad então\ x \approx 10,107cm$$

Então a área do triângulo é dada por:

$$A_{triângulo} = \frac{9 \times 10,107}{2} \approx 45\ cm^2$$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Mobilizar a forma de calcular a área do triângulo;
- Compreender qual é o comprimento que corresponde à base e qual corresponde à altura do triângulo;
- Compreender qual é o triângulo retângulo que permite utilizar as razões trigonométricas;
- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar x;
- Saber quantas casas decimais deve preservar nos cálculos intermédios;
- Determinar o valor aproximado pedido.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora poderá sugerir que os alunos consultem a lapela do manual dos alunos onde aparecem todas as fórmulas para o cálculo das áreas de polígonos.

A professora poderá perguntar:

- "Qual é o comprimento que corresponde à base do triângulo e qual à altura?"; "Porquê?". É uma boa altura para a professora relembrar aos alunos que a altura tem de ser sempre perpendicular à base.
- "Posso aplicar as razões trigonométricas no triângulo representado?"; "Porquê?"; "Qual é o triângulo em que posso utilizar as razões trigonométricas?".

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: “Então como é que podemos isolar x?”. (A professora deverá referir que os alunos podem escolher uma qualquer letra para designar a incógnita, no entanto, esta deve estar univocamente identificada.)

A professora recordará aquilo que já foi referido: quando nada é mencionado no enunciado em relação ao número de casas decimais a serem preservadas nos cálculos intermédios, os alunos deverão deixar pelo menos 3 casas decimais, de forma a que o resultado seja a melhor aproximação possível.

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES:

Uma vez que os alunos têm ritmos de trabalho diferentes, e para permitir estes usem o tempo de aula de forma útil, será sugerido, aos alunos que tenham concluído o trabalho proposto, os exercícios 67 ao 88 das páginas 66 à 69.

AVALIAÇÃO:

A avaliação incidirá nas dinâmicas de pares e no trabalho produzido pelos mesmos, bem como a respetiva participação nas sucessivas discussões. Ir-se-á avaliar o empenho dos alunos, o seu trabalho em aula e as principais dificuldades sentidas. Utilizar-se-ão as tabelas de participação e idas ao quadro, utilizadas regularmente nas aulas.

Anexo 31: Plano de aula do dia 15 de março de 2019

Plano de aula

COLÉGIO MILITAR
Fundado em 1803

Professora: Anabela Candeias
Professora-estagiária: Débora Ferrage

Data: 15/03/2019 Ano: 9.º Turma: C Duração: 45 minutos

LIÇÃO N.º: (Esta aula foi lecionada em substituição da aula de 2.ª feira dia 18.03.2019)

ALUNOS EM FALTA:

SUMÁRIO:

- Resolução de exercícios e problemas.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS: Razões trigonométricas e resolução de problemas.

DOMÍNIO: Geometria e Medida 9 (GM 9).

SUBDOMÍNIO: Trigonometria

METODOLOGIA DA AULA: Trabalho autónomo individual; Discussão e sistematização de ideias em grupo turma.

OBJETIVOS DA AULA: Resolução de problemas de contextos de realidade e/ou puramente matemáticos envolvendo as razões trigonométricas.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS: Razões trigonométricas.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS:

- Desenvolver a comunicação matemática dos alunos, sendo a comunicação escrita potenciada pelas resoluções que estes apresentam das tarefas propostas e a comunicação oral estimulada através das discussões que serão promovidas em grupo turma;
- Desenvolver a capacidade de resolução de problemas no âmbito da trigonometria dado que se pretende que os alunos se familiarizem com os problemas desta unidade e consigam ganhar perspicácia e destreza, através da prática dos mesmos.

RECURSOS:

- Da professora: manual; tabelas de registo (participação e idas ao quadro); fichas de trabalho.
- Do aluno: manual; caderno diário; calculadora científica e/ou tabela trigonométrica.

MOMENTOS DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. (5 minutos)
2. Resolução de uma ficha de trabalho: (40 minutos)
   i. Resolução de exercícios e problemas;
   ii. Apresentação da resolução.

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. **5 minutos**

Este é o momento de registar o sumário e as eventuais faltas dos alunos.

2. Determinar distâncias a locais inacessíveis – Resolver problemas **40 minutos**

i. Resolução:

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Tal como é habitual, enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

ii. Apresentação da resolução e discussão:

Tal como tem sido habitual, a seleção dos grupos a apresentarem a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à escolha.

Tarefa 1 – Exercício 74 da página 66:

a)

1º Processo:

$$cos\ 45° = \frac{3\sqrt{2}}{x} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{\cos 45°} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x = 3 \times 2$$

$$\Leftrightarrow x = 6cm$$

2º Processo:

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\left(3\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 = x^2 \Leftrightarrow 2\left(3\sqrt{2}\right)^2 = x^2 \Leftrightarrow 2 \times 9 \times 2 = x^2 \Leftrightarrow 36 = x^2$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 6 \Leftrightarrow x = 6\ cm,$$

$$porque\ x > 0\ por\ ser\ uma\ medida\ de\ comprimento$$

Resolução alternativa:

Atendendo ao facto de o triângulo ser isósceles, tem-se que os ângulos são complementares, logo,

$\cos(\hat{A}) = sen(90 - \hat{A})$

$$sen\ 45° = \frac{3\sqrt{2}}{x} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{\text{sen}\ 45°} \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Leftrightarrow x = 3\sqrt{2} \times \frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \times 2 \Leftrightarrow x = 6cm$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar as incógnitas;

- Determinar o valor exato pedido em ambos os casos.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: “Quais são os dados do problema?”; “O que queremos determinar?”; “Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?”.

A professora poderá perguntar:

- “Então como é que podemos isolar x?”;
- “Qual é o valor exato da razão trigonométrica com o ângulo indicado?”.

b)

$$tg\ 60° = \frac{x}{5} \Leftrightarrow x = 5 \times tg\ 60° \ \Leftrightarrow x = 5 \times \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 5\sqrt{3}cm$$

$$cos\ 60° = \frac{5}{y} \Leftrightarrow y = \frac{5}{cos60°} \ \Leftrightarrow y = \frac{5}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow y = 5 \times \frac{2}{1} \Leftrightarrow y = 10cm$$

Resolução alternativa:

Atendendo ao facto de o triângulo ser isósceles, tem-se que os ângulos são complementares, logo,

$cos(\hat{A}) = sen(90 - \hat{A})$

$$sen\ 30° = \frac{5}{y} \Leftrightarrow y = \frac{5}{sen30°} \ \Leftrightarrow y = \frac{5}{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow y = 5 \times \frac{2}{1} \Leftrightarrow y = 10cm$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar as incógnitas;
- Determinar o valor aproximado pedido em ambos os casos.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: “Quais são os dados do problema?”; “O que queremos determinar?”; “Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?”.

A professora poderá perguntar:

- “Então como é que podemos isolar x?”;
- “Qual é o valor exato da razão trigonométrica com o ângulo indicado?”.

Tarefa 2 – Exercício 34 da página 58:

Utilizando a FFT, sai:

$$sen^2\hat{L} + \cos^2\hat{L} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{21}{29}\right)^2 + \cos^2\hat{L} = 1 \Leftrightarrow \cos^2\hat{L} = 1 - \frac{441}{841} \Leftrightarrow \cos^2\hat{L} = \frac{400}{841} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow cos\,\hat{L} = \pm\sqrt{\frac{400}{841}} \Leftrightarrow cos\,\hat{L} = \pm\frac{20}{29}$$

Como o alfa é um ângulo agudo, o valor do cosseno terá de ser positivo, logo:

$$cos\hat{L} = \frac{20}{29}$$

Utilizando a relação entre as três razões trigonométricas de um ângulo agudo, sai:

$$tg\hat{L} = \frac{sen\,\hat{L}}{cos\,\hat{L}} = \frac{\frac{21}{29}}{\frac{20}{29}} = \frac{21}{29} \times \frac{29}{20} = \frac{21}{20}$$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

– Compreender que conhecimento deverá mobilizar para resolver a questão;

– Levantar a dois o cosseno de L, levantando somente o numerador;

– Perceber que se trata de uma equação que deverá resolver, sendo a incógnita o seno de alfa, tendo dificuldades na sua resolução, particularmente pelo facto de ter de operar com a subtração de frações e com a raiz quadrada.

O aluno poderá ainda:

- descartar a solução negativa sem a devida justificação.
- não apresentar a solução o mais simplificada possível.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora poderá perguntar:

–“Que conhecimento é que me permite relacionar o valor do cosseno com o valor do seno de um mesmo ângulo?”;

– “O que será elevado a dois?”; “Qual é o valor do cosseno (que será levantado a 2)?”; “ $\frac{20^2}{29}$ é igual a $\left(\frac{20}{29}\right)^2$?”;

– “O que quero determinar?”; “O seno de alfa é a minha incógnita, então o que devo fazer para a isolar?”; “Como posso subtrair frações?”; “Agora que conhecemos o quadrado de seno de alfa, como determinamos o seno de alfa?”;

– “Qual solução deverei escolher: a positiva ou a negativa?”; “Porquê?”;

– “A fração está o mais simplificada possível?”. É importante a professora reforçar que, uma vez que não é pedida nenhuma aproximação, o aluno deverá apresentar o valor exato, que neste caso contempla uma raiz quadrada. A professora poderá sugerir que os alunos contemplem as letras escritas a verde imediatamente antes do exercício 31, com o título *recorda*.

Tarefa 3 – Exercício 62 da página 65:

A altura do poste será designada com a letra h, temos então:

$$tg\ 70° = \frac{h}{4} \Leftrightarrow 84 \times tg\ 70° = h, \qquad então\ h \approx 11\ m$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Conseguir compreender o que representa a altura do poste no triângulo retângulo;
- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar a incógnita h;
- Determinar o valor aproximado pedido.

Apoio a eventuais dificuldades:

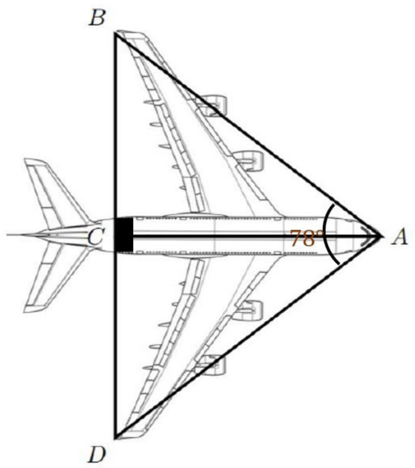
A professora poderá perguntar: “O que representa a altura do poste no triângulo que nos é apresentado?”; “Que nome tem esse comprimento?”.

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: “Quais são os dados do problema?”; “O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar h?";

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

Tarefa 4:



Queremos determinar a envergadura do avião, ou seja, $\overline{BD}$.

Pelos dados do problema, podemos concluir que o triângulo $[BAD]$ é isósceles, dado que $\overline{AB} = \overline{AD}$.

Já sabemos também que $[AC]$ é a altura do triângulo relativamente à base, $[BD]$, o que significa que conseguimos obter dois triângulos que serão retângulos em C, o triângulo $[ACB]$ e o triângulo $[ACD]$.

Como o triângulo $[BAD]$ é isósceles e $[AC]$ é uma altura do triângulo, podemos concluir que $[AC]$ vai dividir em dois triângulos iguais o triângulo inicial, $[BAD]$.

Assim, $B\hat{A}C = C\hat{A}D = \frac{78°}{2} = 36°$.

Focando, por exemplo, no triângulo $[ACB]$, sai:

$$sen\ 36° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow sen\ 36° = \frac{\overline{BC}}{51} \Leftrightarrow 51 \times sen\ 36° = \overline{BC},$$

$$então\ \overline{BC} \approx 29{,}9770\ m$$

$$\overline{BD} = 2 \times \overline{BC} \approx 2 \times 29{,}9770 \approx 59{,}954 \approx 60\ m$$

R: A envergadura do avião é aproximadamente 60 metros.

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Entender que o triângulo [ABC] é isósceles, não conseguindo tirar as conclusões daí advindas;
- Conseguir identificar os triângulos retângulos presentes na figura;

- Justificar devidamente os cálculos apresentados;
- Compreender que a envergadura do avião não é o comprimento de nenhum dos lados do triângulo retângulo;
- Compreender como mobilizar a trigonometria para resolver a questão;
- Conseguir isolar a incógnita;
- Determinar o valor aproximado pedido.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora poderá perguntar:

- "Se $\overline{AB} = \overline{AD}$ o que podemos dizer acerca deste triângulo?"; "Como o podemos classificar quantos aos lados?"; "Uma vez que o triângulo é isósceles, o que podemos concluir em relação aos seus ângulos?";
- "Como o triângulo é isósceles e já sabemos que $[AC]$ representa uma altura do triângulo, o que podemos concluir em relação a ao ângulo em C?"; "O segmento da base vai ser dividido em dois segmentos iguais?"; "Porquê?";

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar a incógnita?";

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES:

Uma vez que os alunos têm ritmos de trabalho diferentes, e para permitir que estes usem o tempo de aula de forma útil, será sugerido, aos alunos que tenham concluído o trabalho proposto, os exercícios 11 e 12 da página 50, os exercícios 19 ao 28 das páginas 53 e 54; exercícios 58 ao 71 das páginas 64, 65 e 66.

AVALIAÇÃO:

A avaliação incidirá no trabalho individual produzido, bem como na respetiva participação nas sucessivas discussões. Ir-se-á avaliar o empenho dos alunos, o seu trabalho em aula e as principais dificuldades sentidas. Utilizar-se-ão as tabelas de participação e idas ao quadro, utilizadas regularmente nas aulas.

Anexo 32: Plano de aula do dia 19 de março de 2019

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias
Professoras-estagiárias: Débora Ferrage e Joana Dias

Data: 19/03/2019 Ano: 9.º Turma: B/C Duração: 90 minutos

LIÇÃO N.º: 110 e 111
ALUNOS EM FALTA:
SUMÁRIO:

- Esclarecimento de dúvidas.
- Resolução de exercícios e problemas.
- 4.ª Questão-Aula.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS: Razões trigonométricas e relações daí decorrentes.
DOMÍNIO: Geometria e Medida 9 (GM 9).
SUBDOMÍNIO: Trigonometria

METODOLOGIA DA AULA: Trabalho autónomo a pares; Discussão e sistematização de ideias em grupo turma.

OBJETIVOS DA AULA: Consolidação dos conteúdos lecionados.
CONHECIMENTOS PRÉVIOS: Razões trigonométricas; Teorema de Pitágoras e seu recíproco; valores aproximados.
CAPACIDADES TRANSVERSAIS:

- Desenvolver a comunicação matemática dos alunos, sendo a comunicação escrita potenciada pelas resoluções que estes apresentam das tarefas propostas e a comunicação oral estimulada através da dinâmica do par onde estão inseridos e das discussões que serão promovidas em grupo turma;
- Desenvolver a capacidade de resolução de problemas dado que irão contactar com problemas em contextos matemáticos e/ou aplicados à realidade, tendo de delinear

uma estratégia eficiente para a sua resolução e saber dar a resposta de acordo com o contexto em questão;

- Desenvolver o raciocínio matemático uma vez que terão de ser capazes de justificar estratégias escolhidas e soluções apresentadas.

RECURSOS:

- Da professora: manual; tabelas de registo (participação e idas ao quadro); fichas de trabalho.
- Do aluno: manual; caderno diário; calculadora científica e tabelas trigonométricas.

MOMENTOS DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. (5 minutos)
   Formação dos grupos.
2. Resolução de exercícios e problemas. (55 minutos)
3. 4.ª Questão-Aula. (30 minutos)

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. **5 minutos**

Formação dos grupos

Neste momento da aula, a professora irá indicar aos alunos que formem grupos (de dois ou três alunos), relembrando-os que o trabalho colaborativo tem como objetivo a entreajuda, possibilitando a discussão de resoluções e resultados.

2. Resolução de exercícios e problemas **55 minutos**

Esta aula terá por objetivo que os alunos consolidem os seus conhecimentos acerca das razões trigonométricas. Serão esclarecidas dúvidas aos alunos. Caso os alunos não apresentem dúvidas, será distribuída uma ficha de trabalho. Serão ainda indicados os exercícios do manual e do caderno de atividades.

i. Resolução da ficha de trabalho n.º 15: **30 minutos**

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Tal como é habitual, enquanto os alunos trabalham, a professora percorrerá a sala, esclarecendo eventuais dúvidas que os grupos possam ter.

ii. Apresentação da Resolução e Discussão: **25 minutos**

A apresentação da resolução no quadro será feita à medida que os alunos forem terminando cada uma das tarefas e tal como tem sido habitual, a seleção dos grupos será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à sua escolha.

Depois de cada resolução dos alunos, a professora pedirá que o aluno que for ao quadro explique o seu procedimento e aproveitará o momento para chamar à atenção de alguns pontos importantes de cada problema.

Tarefa 1

$$cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

a) Pela FFT temos:

$$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$sen^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow sen^2\alpha = 1 - \frac{2}{4} \Leftrightarrow sen^2\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow sen\ \alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow sen\ \alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow sen\ \alpha = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow sen\ \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$porque\ \alpha\ \text{é}\ um\ \text{ângulo}\ agudo.$$

Pela outra relação entre as razões trigonométricas, temos:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

Logo,

$$tg\alpha = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$$

Então, sai:

$$1 + tg^2\alpha = 1 + 1^2 = 1 + 1 = 2$$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

– Compreender que deverá utilizar ambas as relações entre as razões trigonométricas que conhece;

– Elevar ao quadrado o cosseno de alfa, elevando somente o numerador;

– Perceber que se trata de uma equação que deverá resolver, sendo a incógnita o seno de alfa, tendo dificuldades na sua resolução, particularmente pelo facto de ter de operar com a subtração de frações e com a raiz quadrada;

O aluno poderá ainda:

- descartar a solução negativa sem a devida justificação;
- não apresentar a solução o mais simplificada possível;
- achar que apenas uma das relações resolverá a questão e, consequentemente, poderá achar que tem dados em falta para resolver a questão.
- Utilizar valores arredondados, contrariamente ao que é pedido no enunciado.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar:

- “Preciso de determinar o valor desta expressão, uma vez conhecido o cosseno, como poderei relacionar o cosseno com a tangente?”; “Para poder aplicar a relação que relaciona as três razões trigonométricas preciso de conhecer duas delas, já se verifica isso?”; “Que razão – entre o seno e a tangente – é que poderei utilizar para ficar apenas com uma incógnita?”; “Como posso relacionar o seno e o cosseno do mesmo ângulo?”;
- “O que será elevado a dois?”; “Qual é o valor do cosseno (que será levantado a 2)?”; “ $\frac{\sqrt{2}^2}{2}$ é igual a $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$?”;
- “O que quero determinar?”; “O seno de alfa é a minha incógnita, então o que devo fazer para a isolar?”; “Como posso subtrair frações?”; “Agora que conhecemos o quadrado de cosseno de alfa, como determinamos o seno de alfa?”;
- “Qual solução deverei escolher: a positiva ou a negativa?”; “Porquê?”;
- “A fração está o mais simplificada possível?”. É importante a professora reforçar que, uma vez que não é pedido nenhuma aproximação, o aluno deverá deixar o valor exato, que neste caso contempla uma raiz quadrada.;
- “Como é que podemos dividir frações?”. A professora poderá ainda recordar como se procede nessa operação.

b)

$$2sen\,\alpha - tg\alpha \;= 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

– Compreender que todos os valores de que necessita já estão determinados, procedendo a cálculos desnecessários;

– Operar com raízes e com frações.

O aluno poderá ainda não apresentar o valor exato da solução, procedendo ao cálculo do seu valor aproximado.

Apoio a eventuais dificuldades:

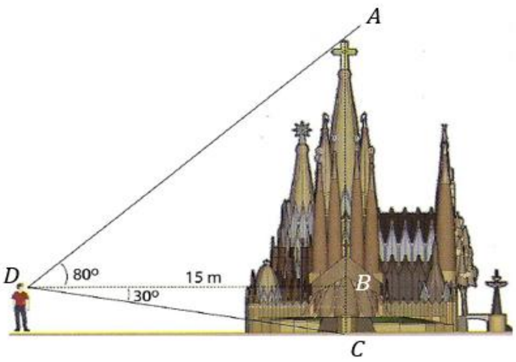
A professora deverá perguntar: "Já conheço o valor do seno de alfa?"; "E da tangente?"; "Preciso de determinar mais alguma coisa?".

É importante a professora reforçar que, uma vez que não é pedido nenhuma aproximação, o aluno deverá deixar o valor exato, que neste caso contempla uma raiz quadrada.

Tarefa 2

$\overline{AC}$ é a altura da catedral e aquilo que queremos determinar:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$$



$$tg80° = \frac{\overline{AB}}{15} \Leftrightarrow \overline{AB} = 15 \times tg80°,$$

$$então\ \overline{AB} \approx 85{,}069\ m$$

$$tg30° = \frac{\overline{BC}}{15} \Leftrightarrow \overline{BC} = 15 \times tg30°,$$

$$então\ \overline{BC} \approx 8{,}660\ m$$

Logo,

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} \approx 85{,}069 + 8{,}660 \approx 93{,}729 \approx 94\ m$$

R: A altura da catedral é aproximadamente 94 metros.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em

- compreender qual razão trigonométrica relaciona a medida de comprimento que é dada, com a medida de comprimento que é pedida.;
- compreender que a altura do monumento é obtida através da soma da medida do comprimento $\overline{AB}$ com a medida do comprimento $\overline{BC}$;
- perceber quantas casas decimais deverá usar nos cálculos intermédios;
- conseguir isolar a incógnita;
- determinar o valor das tangentes;

– arredondar às casas decimais pedidas.

O aluno poderá ainda não responder ao problema, ou seja, escrever simplesmente o valor do comprimento, não contextualizando esse comprimento com o problema.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora deverá começar por sugerir que os alunos nomeiem todos os vértices dos triângulos na figura, para mais facilmente serem designados os lados dos mesmos.

A professora sugerirá que sejam consultados os registos acerca das razões trigonométricas de forma que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Que dados o problema nos fornece?"; "Que dados é que o problema pede?"; "Que razão relaciona o dado que temos com a informação que queremos obter?".

A professora poderá perguntar: "A altura do monumento é dada por que comprimento?"; "Como é que posso obter a medida desse comprimento?".

A professora deverá indicar aos alunos que nos cálculos intermédios deixem sempre pelo menos mais duas casas decimais do que aquelas que são pedidas para o resultado final, assim, se para o resultado final pedem em décimas, os alunos deverão nos cálculos intermédios arredondar às milésimas. Isto se no enunciado não existir essa referência.

A professora poderá perguntar: "Então como é que podemos isolar a incógnita?"; "Se 15 está a dividir no 2.º membro como pode passar para o 1.º membro da equação?".

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a efetuar nos arredondamentos.

A professora deverá relembrar aos alunos que deverão sempre apresentar a resposta do problema, contextualizando a mesma, que neste caso, é a altura do monumento.

Tarefa 3

a)

Tem-se $\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$ e $\overline{AE}^2 = 15^2 = 225$.

Assim, $\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AE}^2$

Portanto, usando o recíproco do Teorema de Pitágoras, conclui-se que o triângulo $[ADE]$ é retângulo em D.

Dificuldades:

O aluno poderá considerar que o triângulo é retângulo pela observação do que parece ser um ângulo reto na figura.

O aluno poderá ter dificuldades em mobilizar o recíproco do Teorema de Pitágoras.

O aluno poderá confundir o Teorema de Pitágoras com o seu recíproco.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora deverá perguntar: "Quando tenho um triângulo, que conhecimento é que me permite garantir que esse mesmo triângulo é retângulo?" e evidenciar que não existe informação nas figuras que permita assumir que o triângulo possuiu um ângulo reto; "Conhecem algum teorema que nos permita concluir que um triângulo é retângulo?"; "Qual o lado poderá ser a hipotenusa? Porquê?".

A professora deverá recordar com os alunos quando é que se usa o Teorema de Pitágoras ou o seu recíproco: o Teorema só pode ser aplicado quando sabemos que o triângulo é retângulo, enquanto que o seu recíproco permite garantir isso mesmo.

b)

Uma vez que o triângulo é retângulo em *D*, como acabamos de provar, então $\widehat{A} + \widehat{E} = 90°$, isto é, o ângulo em A e o ângulo em E são complementares. Como o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do ângulo complementar, segue que $cos\,\widehat{A} = sen\,\widehat{E}$.

Dificuldades:

O aluno poderá não conseguir mobilizar a relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora deverá perguntar: "Qual é o conhecimento que me permite igualar o seno de um ângulo ao cosseno de outro?". Caso os alunos não consigam responder a esta pergunta a professora poderá perguntar: "Qual é valor do seno do ângulo em *A*?"; "E qual é o valor do cosseno do ângulo em E?"; "O que são o ângulo em A e o ângulo em *E?*".

c)

Dado que o triângulo é retângulo, podemos aplicar as razões trigonométricas. Neste caso como temos todas as medidas de comprimento dos lados podemos aplicar qualquer uma das razões trigonométricas, logo:

$$sen\,\hat{A} = \frac{12}{15} \Leftrightarrow sen\,\hat{A} = 0{,}8 \Leftrightarrow \hat{A} = sen^{-1}(0{,}8), \qquad então\ \hat{A} \approx 53{,}1°$$

Ou:

$$cos\ \hat{A} = \frac{9}{15} \Leftrightarrow cos\ \hat{A} = 0{,}6 \Leftrightarrow \hat{A} = cos^{-1}(0{,}6), \qquad então\ \hat{A} \approx 53{,}1°$$

Ou:

$$tg\ \hat{A} = \frac{12}{9} \Leftrightarrow \hat{A} = tg^{-1}\left(\frac{12}{9}\right), \qquad então\ \hat{A} \approx 53{,}1°$$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Recordar o que deverá fazer para obter o valor do ângulo, sabendo o valor da razão trigonométrica;
- Compreender que poderá usar qualquer uma das razões trigonométricas;
- Fazer os arredondamentos com as casas pedidas.

O aluno poderá esquecer-se de colocar os graus.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora poderá perguntar:

- "O que sabemos: o valor da amplitude do ângulo ou o valor da razão trigonométrica?"; "Que tecla da calculadora deveremos usar?";
- "Que razão trigonométrica podemos usar?"; "Porquê?";
- "Que arredondamento pretendemos?".

d)

Comecemos por determinar o lado $\overline{AC}$. Podemos reparar que $\overline{AB} = \overline{BE} = 7{,}5\ cm$.

$$cos\ \hat{A} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow 0{,}6 = \frac{7{,}5}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{7{,}5}{0{,}6}, \qquad então\ \overline{AC} = 12{,}5\ cm$$

Calculemos agora $\overline{DC}$:

$$\overline{DC} = \overline{AC} - \overline{AD} = 12{,}5 - 9 = 3{,}500\ cm$$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar a incógnita $\overline{AC}$;
- Perceber que $\overline{DC}$ resulta de uma diferença;

– Determinar o valor aproximado pedido.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora sugerirá que sejam consultados os registos acerca das razões trigonométricas de forma que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: “Que dados o problema nos fornece?”; “Que dados é que o problema pede?”; “Que razão relaciona o dado que temos com a informação que queremos obter?”.

A professora poderá perguntar:

– “Então como é que podemos isolar $\overline{AC}$?”;
– “Como podemos calcular $\overline{DC}$?”; “Que comprimentos precisamos conhecer?”.

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

Tarefa 4

Pelos dados temos:

$$tg\ \hat{B}=\frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow tg\ 60° = \frac{x}{y}$$

Obtemos duas incógnitas, logo precisamos de duas equações:

$$tg\ \hat{A}=\frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow tg\ 30° = \frac{x}{20+y}$$

Então, é possível escrever um sistema de duas equações a duas incógnitas:

$$\begin{cases} \sqrt{3}=\frac{x}{y} \\ \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{x}{20+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3}y \\ \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}y}{20+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ \frac{1}{3}=\frac{y}{20+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 3y=20+y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 2y=20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=10\sqrt{3}\ m \\ y=10\ m \end{cases}$$

$$x = 10\sqrt{3}\, m \approx 17{,}3\, m$$

R: A altura da estação base é aproximadamente 17,3 metros.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Conseguir compreender o que representa a altura da base da estação no triângulo;
- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Equacionar o problema, compreendendo que como tem duas incógnitas precisamos de duas equações, logo um sistema de duas equações a duas incógnitas;
- Conseguir resolver o sistema;
- Manter nos cálculos intermédios o valor exato;
- Determinar o valor aproximado pedido.

O aluno poderá ainda não apresentar a resposta ao problema.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar: "O que representa a altura da base da estação no triângulo que nos é apresentado?"; "Que nome tem esse comprimento?".

A professora sugerirá que sejam consultados os registos acerca das razões trigonométricas de forma que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Que dados o problema nos fornece?"; "Que dados é que o problema pede?"; "Que razão relaciona o dado que temos com a informação que queremos obter?".

A professora poderá perguntar:

- "Como posso obter o valor de ambas as incógnitas?"; "Dado que tenho duas incógnitas, quantas equações são precisas?"; "Como se chama este objeto matemático?";
- "Como posso resolver o sistema?"; "Qual é o método que posso utilizar para a resolução do mesmo?".

A professora deverá relembrar aos alunos que deverão manter nos cálculos intermédios os valores exatos das razões trigonométricas, tal como sugere o enunciado. É uma boa oportunidade para que a professora reforce que os alunos deverão ler os enunciados das questões com atenção.

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

A professora deverá relembrar os alunos de que, sempre que o problema tem um contexto de realidade, eles deverão apresentar uma resposta ao mesmo.

Tarefa 5

Como α e β são ângulos complementares, temos:

$$cos\ \alpha = \frac{b}{c} = sen\ \beta;\ cos\ \beta = \frac{a}{c} = sen\ \alpha$$

Logo: $cos\alpha \times sen\beta + sen\alpha \times cos\beta = \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{b^2+a^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$

$\boxed{\text{TdP}}$

$\blacksquare$

Demonstração alternativa:

Como α e β são ângulos complementares, temos:

$$cos\ \alpha = \frac{b}{c} = sen\ \beta;\ cos\ \beta = \frac{a}{c} = sen\ \alpha$$

Logo:

$$cos\alpha \times sen\beta + sen\alpha \times cos\beta = cos\alpha \times cos\alpha + sen\alpha \times sen\alpha = \cos^2\alpha + sen^2\alpha = 1$$

$\boxed{\text{FFT}}$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Conseguir começar a demonstração;
- Perceber quais as razões que traduzem o seno e o cosseno de alfa;
- Compreender que deverá elevar ao quadrado cada uma das razões escritas anteriormente, e uma vez que se trata de uma fração, que deverá elevar ao quadrado tanto o numerador como o denominador;
- Conseguir escrever com o mesmo denominador o segundo membro da equação;
- Relacionar o que escreveu com o Teorema de Pitágoras e tendo em conta o triângulo representado.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora deverá relembrar aos alunos que como se trata de uma demonstração temos de provar que a igualdade estabelecida é válida, e que para isso, os alunos não poderão utilizá-la durante a demonstração, terão de a deduzir.

A professora poderá perguntar: “Se me apresentam o triângulo com as medidas de comprimento dos lados e preciso de provar esta relação, como posso fazer?”; “Como posso escrever o seno de alfa?”; “E o cosseno?”;

A professora deverá chamar à atenção de toda a turma da importância da colocação dos parêntesis porque esse cuidado evita erros desnecessários. A professora poderá dar um exemplo: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \neq \frac{2^2}{3}$.

A professora poderá questionar:

- “Como é que se adicionam frações?”; “As frações já têm o mesmo denominador?”; “Se sim, o que preciso de fazer agora?”;
- “Consigo utilizar algum dos conhecimentos sobre triângulos retângulos para chegar ao resultado pretendido?”; “Como?”. Caso os alunos não consigam mobilizar o Teorema de Pitágoras, e se a professora achar necessário, recordá-lo-á em grande grupo. A professora poderá perguntar: “O que refere o Teorema de Pitágoras?”; “Então, já sei que o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos. Quais são os catetos e a hipotenusa neste triângulo?”; “Já consigo relacionar isso com a fração que tenho escrita?”.

3. 4.ª Questão-Aula **30 minutos**

Neste momento da aula, os alunos realizaram uma questão aula como instrumento de avaliação sumativa e formativa, uma vez que as questões aula são um dos parâmetros da avaliação sumativa dos alunos, no entanto, será dado feedback à produção dos alunos, para que os eventuais erros não sejam repetidos na ficha de avaliação a realizar na semana seguinte.

ATIVIDADES COMPLEMENTARES:

Uma vez que os alunos têm ritmos de trabalho diferentes, e para permitir estes usem o tempo de aula de forma útil, será sugerido, aos alunos que tenham concluído o trabalho proposto, os exercícios 75, 77, 78, 79, 80, 81, 83, 84, 85 e 88 das páginas 68 e 69 do manual dos alunos e ainda a ficha global do caderno de atividades.

AVALIAÇÃO:

A avaliação incidirá nas dinâmicas de pares e no trabalho produzido pelos mesmos, bem como a respetiva participação nas sucessivas discussões. Ir-se-á avaliar o empenho dos alunos, o seu trabalho em aula e as principais dificuldades sentidas. Utilizar-se-ão as tabelas de participação e idas ao quadro, utilizadas regularmente nas aulas. Será realizada uma questão aula.

Anexo 33: Plano de aula do dia 21 de março de 2019

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias
Professora-estagiária: Débora Ferrage

Data: 21/03/2019 Ano: 9.º Turma: C Duração: 90 minutos

LIÇÃO N.º: 112 e 113
ALUNOS EM FALTA:
SUMÁRIO:

- Entrega e correção da 4.ª Questão-Aula.
- Resolução de exercícios e problemas.
- Esclarecimento de dúvidas para o teste.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS: Razões trigonométricas e relações daí decorrentes.
DOMÍNIO: Geometria e Medida 9 (GM 9).
SUBDOMÍNIO: Trigonometria

METODOLOGIA DA AULA: Trabalho autónomo a pares; Discussão e sistematização de ideias em grupo turma.
OBJETIVOS DA AULA: Consolidação dos conteúdos lecionados.
CONHECIMENTOS PRÉVIOS: Razões trigonométricas; Teorema de Pitágoras e seu recíproco; valores aproximados.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS:

- Desenvolver a comunicação matemática dos alunos, sendo a comunicação escrita potenciada pelas resoluções que estes apresentam das tarefas propostas e a comunicação oral estimulada através da dinâmica do par onde estão inseridos e das discussões que serão promovidas em grupo turma;

- Desenvolver a capacidade de resolução de problemas dado que irão contactar com problemas em contextos matemáticos e/ou aplicados à realidade, tendo de delinear uma estratégia eficiente para a sua resolução e saber dar a resposta de acordo com o contexto em questão;
- Desenvolver o raciocínio matemático uma vez que terão de ser capazes de justificar estratégias escolhidas e soluções apresentadas.

RECURSOS:

- Da professora: manual; tabelas de registo (participação e idas ao quadro).
- Do aluno: manual; caderno diário; calculadora científica e tabelas trigonométricas; fichas de trabalho.

MOMENTOS DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. (5 minutos)
2. Entrega e correção da 4.ª Questão Aula. (30 minutos)
3. Resolução de exercícios e problemas. (55 minutos)

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. **5 minutos**

2. Entrega e correção da 4.ª Questão Aula. **20 minutos**

Neste momento a professora irá entregar e corrigir a 4.ª Questão-aula. Durante a resolução, a professora aproveitará o momento para chamar a atenção dos alunos para os aspetos mais relevantes dos exercícios e problemas da questão aula, bem como os erros mais frequentes.

Resolução da 4.ª Questão Aula

Tarefa 1:

$$cos67° = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow cos67° = \frac{8}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{8}{cos67°},$$

$$então\ \overline{AC} \approx 20{,}5\ cm$$

Tarefa 2:

$$sen\alpha = \frac{\overline{HI}}{\overline{GI}} \Leftrightarrow sen\alpha = \frac{15}{16} \Leftrightarrow \alpha = sen^{-1}\left(\frac{15}{16}\right), \qquad então\ \alpha \approx 69,6°$$

Tarefa 3:

$$tg18° = \frac{\overline{AD}}{\overline{ED}} \Leftrightarrow tg18° = \frac{\overline{AD}}{45} \Leftrightarrow \overline{AD} = 45 \times tg18°, então\ \overline{AD} \approx 14,62139\ m$$

$$\overline{AB} = \overline{AD} + 6 \approx 14,62139 + 6 \approx 20,621m$$

Tarefa 4:

a) Pela FFT temos:

$$sen^2\alpha + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow sen^2\alpha + \frac{4}{9} = 1 \Leftrightarrow sen^2\alpha = 1 - \frac{4}{9} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow sen^2\alpha = \frac{5}{9} \Leftrightarrow sen\ \alpha = \pm\sqrt{\frac{5}{9}} \Leftrightarrow sen\ \alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow sen\ \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3},$$
$$porque\ \alpha\ é\ agudo\ (ou\ seno\ de\ qualquer\ ângulo\ agudo\ \in]0,1[)$$

b)

Pela outra relação entre as razões trigonométricas, temos:

$$tg\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$$

Logo,

$$tg\alpha = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Tarefa 5:

Como o ângulo *ABC* é reto, então o triângulo é retângulo em *B* e, relativamente ao ângulo *BAC*, o lado [AB] é o cateto adjacente e o lado [AC] é a hipotenusa, pelo que, usando a definição de cosseno, temos:

$$cosB\hat{A}C = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow cos35° = \frac{\overline{AB}}{46} \Leftrightarrow \overline{AB} = 46 \times cos35°,$$

$$então\ \overline{AB} \approx 37{,}69\ m$$

Os triângulos [ABC] e [DFE] são iguais, logo, $\overline{AB} = \overline{FE}$ e $\overline{BF} = \overline{CD}$.

Agora resta calcular o pretendido:

$$\overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BF} + \overline{FE}, \qquad então$$

$$92 \approx 37{,}69 + \overline{BF} + 37{,}69$$

Logo,

$$\overline{BF} \approx 17\ m$$

R: A distância entre os pontos *C* e *D* é aproximadamente 17 metros.

2. Resolução de exercícios e problemas **25 minutos**

Esta aula, tal como a anterior, terá por objetivo que os alunos consolidem os seus conhecimentos acerca das razões trigonométricas. Neste momento, a professora entregará aos alunos uma ficha de trabalho, onde foi feita uma compilação das questões aula aplicadas às restantes turmas do 9.ºano.

i. Resolução da ficha de trabalho n.º 15: **15 minutos**

Este é um momento de trabalho autónomo dos alunos. Tal como tem sido habitual, a seleção dos grupos a apresentarem a resolução no quadro será feita tendo em conta a participação voluntária dos alunos, e será realizada uma a uma à medida que a maioria dos alunos for terminando. Caso não haja grupos voluntários, a professora procederá à sua escolha.

ii. Apresentação da Resolução: **10 minutos**

Tarefa 3

a)

Tem-se $\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = 9^2 + 12^2 = 81 + 144 = 225$ e $\overline{AE}^2 = 15^2 = 225$.

Assim, $\overline{AD}^2 + \overline{DE}^2 = \overline{AE}^2$

Portanto, usando o recíproco do Teorema de Pitágoras, conclui-se que o triângulo $[ADE]$ é retângulo em D.

Dificuldades:

O aluno poderá considerar que o triângulo é retângulo pela observação do que parece ser um ângulo reto na figura.

O aluno poderá ter dificuldades em mobilizar o recíproco do Teorema de Pitágoras.

O aluno poderá confundir o Teorema de Pitágoras com o seu recíproco.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora deverá

- perguntar: "Quando tenho um triângulo, que conhecimento é que me permite garantir que esse mesmo triângulo é retângulo?" e evidenciar que não existe informação nas figuras que permita assumir que o triângulo possuiu um ângulo reto; "Conhecem algum teorema que nos permita concluir que um triângulo é retângulo?"; "Qual o lado poderá ser a hipotenusa? Porquê?";
- recordar com os alunos quando é que se usa o Teorema de Pitágoras ou o seu recíproco: o Teorema só pode ser aplicado quando sabemos que o triângulo é retângulo, enquanto que o seu recíproco permite garantir isso mesmo.

b)

Uma vez que o triângulo é retângulo em *D*, como acabamos de provar, então $\widehat{A} + \widehat{E} = 90°$, isto é, o ângulo em *A* e o ângulo em *E* são complementares. Como o seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do ângulo complementar, segue que $cos\,\widehat{A} = sen\,\widehat{E}$.

Dificuldades:

O aluno poderá não conseguir mobilizar a relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora deverá perguntar: "Qual é o conhecimento que me permite igualar o seno de um ângulo ao cosseno de outro?". Caso os alunos não consigam responder a esta pergunta a professora poderá perguntar: "Qual é valor do seno do ângulo em *A*?"; "E qual é o valor do cosseno do ângulo em *E?*"; "O que são o ângulo em *A* e o ângulo em *E?*".

c)

Dado que o triângulo é retângulo, podemos aplicar as razões trigonométricas. Neste caso como temos todas as medidas de comprimento dos lados podemos aplicar qualquer uma das razões trigonométricas, logo:

$$sen\,\hat{A} = \frac{12}{15} \Leftrightarrow sen\,\hat{A} = 0{,}8 \Leftrightarrow \hat{A} = sen^{-1}(0{,}8), \qquad então\ \hat{A} \approx 53{,}1°$$

Ou:

$$cos\,\hat{A} = \frac{9}{15} \Leftrightarrow cos\,\hat{A} = 0{,}6 \Leftrightarrow \hat{A} = cos^{-1}(0{,}6), \qquad então\ \hat{A} \approx 53{,}1°$$

Ou:

$$tg\,\hat{A} = \frac{12}{9} \Leftrightarrow \hat{A} = tg^{-1}\left(\frac{12}{9}\right), \qquad então\ \hat{A} \approx 53{,}1°$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Recordar o que deverá fazer para obter o valor do ângulo, sabendo o valor da razão trigonométrica;
- Compreender que poderá usar qualquer uma das razões trigonométricas;
- Fazer os arredondamentos com as casas pedidas.

O aluno poderá esquecer-se de colocar os graus.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar:

- "O que sabemos: o valor da amplitude do ângulo ou o valor da razão trigonométrica?"; "Que tecla da calculadora deveremos usar?";
- "Que razão trigonométrica podemos usar?"; "Porquê?";
- "Que arredondamento pretendemos?".

d)

Comecemos por determinar o lado $\overline{AC}$. Podemos reparar que $\overline{AB} = \overline{BE} = 7{,}5\ cm$.

$$cos\,\hat{A} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow 0{,}6 = \frac{7{,}5}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AC} = \frac{7{,}5}{0{,}6}, \qquad então\ \overline{AC} = 12{,}5\ cm$$

Calculemos agora $\overline{DC}$:

$$\overline{DC} = \overline{AC} - \overline{AD} = 12{,}5 - 9 = 3{,}500\ cm$$

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Conseguir isolar a incógnita $\overline{AC}$;
- Perceber que $\overline{DC}$ resulta de uma diferença;
- Determinar o valor aproximado pedido.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora sugerirá que sejam consultados os registos acerca das razões trigonométricas de forma que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Que dados o problema nos fornece?"; "Que dados é que o problema pede?"; "Que razão relaciona o dado que temos com a informação que queremos obter?".

A professora poderá perguntar:

- "Então como é que podemos isolar $\overline{AC}$?";
- "Como podemos calcular $\overline{DC}$?"; "Que comprimentos precisamos conhecer?".

A professora deverá sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

Tarefa 4

Pelos dados temos:

$$tg\ \hat{B} = \frac{\overline{DC}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow tg\ 60° = \frac{x}{y}$$

Obtemos duas incógnitas, logo precisamos de duas equações:

$$tg\ \hat{A} = \frac{\overline{DC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow tg\ 30° = \frac{x}{20 + y}$$

Então, é possível escrever um sistema de duas equações a duas incógnitas:

$$\begin{cases} \sqrt{3} = \dfrac{x}{y} \\ \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{x}{20+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3}y \\ \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{\sqrt{3}y}{20+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ \dfrac{1}{3} = \dfrac{y}{20+y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 3y = 20 + y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ 2y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 10\sqrt{3}\,m \\ y = 10\,m \end{cases}$$

$$x = 10\sqrt{3}\,m \approx 17{,}3\,m$$

R: A altura da estação base é aproximadamente 17,3 metros.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Conseguir compreender o que representa a altura da base da estação no triângulo;
- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medida de comprimento que é dada com a medida de comprimento que é pedida;
- Equacionar o problema, compreendendo que como tem duas incógnitas precisamos de duas equações, logo um sistema de duas equações a duas incógnitas;
- Conseguir resolver o sistema;
- Manter nos cálculos intermédios o valor exato;
- Determinar o valor aproximado pedido.

O aluno poderá ainda não apresentar a resposta ao problema.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar: “O que representa a altura da base da estação no triângulo que nos é apresentado?”; “Que nome tem esse comprimento?”.

A professora sugerirá que sejam consultados os registos acerca das razões trigonométricas de forma que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: “Que dados o problema nos fornece?”; “Que dados é que o problema pede?”; “Que razão relaciona o dado que temos com a informação que queremos obter?”.

A professora poderá perguntar:

- "Como posso obter o valor de ambas as incógnitas?"; "Dado que tenho duas incógnitas, quantas equações são precisas?"; "Como se chama este objeto matemático?";
- "Como posso resolver o sistema?"; "Qual é o método que posso utilizar para a resolução do mesmo?".

A professora deverá:

- relembrar aos alunos que deverão manter nos cálculos intermédios os valores exatos das razões trigonométricas, tal como sugere o enunciado. É uma boa oportunidade para que a professora reforce que os alunos deverão ler os enunciados das questões com atenção.
- sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.
- relembrar os alunos de que, sempre que o problema tem um contexto de realidade, eles deverão apresentar uma resposta ao mesmo.
-

3. Esclarecimento de dúvidas **45 minutos**

Sendo a aula antes do teste, serão reservados estes 45 minutos da aula para que os alunos possam esclarecer as suas dúvidas, não só sobre a trigonometria, mas também sobre os temas da Probabilidade e Inequações. Caso não haja dúvidas ou estas não ocupem todo este momento da aula, a professora retomará a realização e correção da ficha de trabalho.

Tarefa 5

Como α e β são ângulos complementares, temos:

$$cos\ \alpha = \frac{b}{c} = sen\ \beta;\ cos\ \beta = \frac{a}{c} = sen\ \alpha$$

Logo: $cos\alpha \times sen\beta + sen\alpha \times cos\beta = \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{b^2+a^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} \underset{\boxed{\text{TdP}}}{=} 1$

$\blacksquare$

<u>Demonstração alternativa</u>:

Como α e β são ângulos complementares, temos:

$$cos\ \alpha = \frac{b}{c} = sen\ \beta;\ cos\ \beta = \frac{a}{c} = sen\ \alpha$$

Logo:

$$cos\alpha \times sen\beta + sen\alpha \times cos\beta = cos\alpha \times cos\alpha + sen\alpha \times sen\alpha$$
$$= \cos^2 \alpha + sen^2\alpha = 1$$

FFT

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Conseguir começar a demonstração;
- Perceber quais as razões que traduzem o seno e o cosseno de alfa;
- Compreender que deverá elevar ao quadrado cada uma das razões escritas anteriormente, e uma vez que se trata de uma fração, que deverá elevar ao quadrado tanto o numerador como o denominador;
- Conseguir escrever com o mesmo denominador o segundo membro da equação;
- Relacionar o que escreveu com o Teorema de Pitágoras e tendo em conta o triângulo representado.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora deverá relembrar aos alunos que como se trata de uma demonstração temos de provar que a igualdade estabelecida é válida, e que para isso, os alunos não poderão utilizá-la durante a demonstração, terão de a deduzir.

A professora poderá perguntar: “Se me apresentam o triângulo com as medidas de comprimento dos lados e preciso de provar esta relação, como posso fazer?”; “Como posso escrever o seno de alfa?”; “E o cosseno?”;

A professora deverá chamar à atenção de toda a turma da importância da colocação dos parêntesis porque esse cuidado evita erros desnecessários. A professora poderá dar um exemplo: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \neq \frac{2^2}{3}$.

A professora poderá questionar:

- “Como é que se adicionam frações?”; “As frações já têm o mesmo denominador?”; “Se sim, o que preciso de fazer agora?”;
- “Consigo utilizar algum dos conhecimentos sobre triângulos retângulos para chegar ao resultado pretendido?”; “Como?”. Caso os alunos não consigam mobilizar o Teorema de Pitágoras, e se a professora achar necessário, recordá-lo-á em grande grupo. A professora poderá perguntar: “O que refere o Teorema de Pitágoras?”; “Então, já sei que o quadrado do

comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos comprimentos dos catetos. Quais são os catetos e a hipotenusa neste triângulo?”; “Já consigo relacionar isso com a fração que tenho escrita?”.

Tarefa 6

Distância percorrida é dada por: $\overline{AB} + \overline{BD} + \overline{AD}$

Amplitudes dos ângulos:

- $C\hat{A}D = 60°$
- $A\hat{D}B = 20°$
- $A\hat{B}D = 180° - 20° - 60° = 100°$
- $C\hat{B}D = 180° - 100° = 80°$
- $C\hat{D}B = 180° - 90° - 80° = 10°$

Pelos dados temos:

$$cos\ C\hat{A}D = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow cos\ 60° = \frac{\overline{AC}}{400} \Leftrightarrow \overline{AC} = 400 \times \frac{1}{2}$$

Então $\overline{AC} = 200$ metros

Pelo teorema de Pitágoras,

$$\overline{AC}^2 + \overline{CD}^2 = \overline{AD}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 200^2 + \overline{CD}^2 = 400^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 160000 - 40000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{CD} = \pm\sqrt{120000}, \qquad \overline{CD} > 0, porque\ é\ uma\ medida\ de\ comprimento$$

Então $\overline{CD} \approx 346{,}410$ metros

Ou,

$$sen\ C\hat{A}D = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} \Leftrightarrow sen\ 60° = \frac{\overline{CD}}{400} \Leftrightarrow \overline{CD} = 400 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Então $\overline{CD} \approx 346{,}410$ metros

Por outro lado,

$$cos\ C\hat{D}B = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} \Rightarrow cos\ 10° \approx \frac{346{,}410}{\overline{BD}} \Rightarrow \overline{BD} \approx 351{,}754\ metros$$

E,

$$tg\ C\hat{D}B = \frac{\overline{BC}}{\overline{CD}} \Rightarrow tg\ 10° \approx \frac{\overline{BC}}{346{,}410} \Rightarrow \overline{BC} \approx 61{,}081\ metros$$

Logo,

$$\overline{AB} = \overline{AC} - \overline{BC} \approx 200 - 61{,}081 \approx 138{,}919\ m$$

$$\overline{BD} \approx 351{,}754\ m$$

$$\overline{AD} = 400\ m$$

Assim:

$$\overline{AB} + \overline{BD} + \overline{AD} \approx 138{,}919 + 351{,}754 + 400 \approx 890{,}673 \approx 890{,}7\ metros$$

R: A distância percorrida neste percurso é aproximadamente 890,7 metros.

Dificuldades:

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Conseguir compreender qual é a distância percorrida;
- Compreender quais as razões trigonométricas que relacionam as medidas de comprimento dadas com as medidas de comprimento pedidas;
- Conseguir isolar as incógnitas, nos diversos passos do problema;
- Mobilizar o Teorema de Pitágoras;
- Preservar nos cálculos intermédios as casas decimais necessárias;
- Determinar o resultado com o valor aproximado pedido.

O aluno poderá ainda não apresentar:

- A devida justificação para descartar a solução negativa advinda do Teorema de Pitágoras;
- A resposta ao problema.

Apoio a eventuais dificuldades:

A professora poderá perguntar: "Como podemos calcular a distância percorrida no percurso?"; "Matematicamente, o que representa a soma destas distâncias?". É uma boa altura para que a professora relembra aos alunos que aquilo que está a ser calculado é o perímetro do triângulo.

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma a que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar:

- "Como posso obter o comprimento do lado *CD*?"; "Se este é um triângulo retângulo, que conhecimento posso usar para me auxiliar a determinar esse lado?";
- "Onde se encontra a incógnita a isolar?"; "No numerador ou no denominador?"; "Se a incógnita se encontra no denominador, como a

posso isolar?"; "Se a incógnita se encontra em numerador como a posso isolar?";

A professora deverá:

- Relembrar aos alunos que deverão preservar nos cálculos intermédios pelo menos duas casas decimais a mais do que aquelas que são pedidas para o resultado final, de forma a que este último seja o mais fidedigno possível;
- Sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos;
- Recordar aos alunos que sempre que tem duas soluções numa equação e num determinado contexto, como sucede neste, têm de descartar uma das duas, deverão sempre justificar a razão pela qual o fazem;
- Referir, ainda, que sempre que o problema tem um contexto de realidade os alunos deverão apresentar uma resposta ao mesmo, no final da resolução.

Tarefa 7

$$tg\ \hat{B} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow tg\ 30° = \frac{\overline{CA}}{6} \Leftrightarrow \overline{CA} = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$P_{circunferência} = 2 \times \pi \times r$$

Podemos observar que o raio é $\overline{CA}$, logo:

$$P_C = 2 \times \pi \times 2\sqrt{3} = 4\pi\sqrt{3} \approx 21{,}7656 \approx 21{,}77\ u.c$$

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Mobilizar a fórmula do perímetro da circunferência;
- Compreender que o raio da circunferência é o comprimento *CA;*
- Compreender qual a razão trigonométrica que relaciona a medidas de comprimento dada com a medida de comprimento pedida;
- Conseguir isolar a incógnita;

– Preservar nos cálculos intermédios as casas decimais necessárias;
– Determinar o resultado com o valor aproximado pedido.
– Apresentar as unidades de perímetro corretas.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora poderá perguntar:

– "Como podemos calcular o perímetro da circunferência?";
– "Já vimos que precisamos do raio da circunferência?"; "O que é um raio da circunferência?"; "Há algum comprimento que já esteja marcado e que represente o raio da circunferência?".

A professora sugerirá que os alunos consultem os registos acerca das razões trigonométricas de forma que rapidamente consigam escrever o quociente que se pretende. Ou ainda deverá perguntar: "Quais são os dados do problema?"; "O que queremos determinar?"; "Que razão trigonométrica relaciona os dados do problema com o que pretendemos determinar?".

A professora poderá perguntar: "Se o comprimento *CA* se encontra no numerador como se pode isolá-lo?".

A professora deverá

– relembrar aos alunos que deverão preservar nos cálculos intermédios pelo menos duas casas decimais a mais do que aquelas que são pedidas para o resultado final, de forma que este último seja o mais fidedigno possível. No entanto, como o valor da amplitude do ângulo é a de um ângulo de referência, os alunos deverão deixar o seu valor exato;
– sugerir que o aluno consulte os apontamentos sobre os arredondamentos, da unidade dos números e inequações. Caso o aluno permaneça com dúvidas, a professora fará o esclarecimento do procedimento a ter com os arredondamentos.

A professora poderá relembrar que como o cálculo efetuado é referente a um perímetro, deverá aparecer a unidade de perímetro correspondente, dado que não existem medidas no enunciado, os alunos deverão escrever simplesmente $u.c.$.

Tarefa 8

Queremos provar $sen\,\alpha \times \cos\alpha \times tg\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

$$sen\,\alpha \times \cos\alpha \times tg\,\alpha + \cos^2\alpha = sen\,\alpha \times \cos\alpha \times \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha} + \cos^2\alpha =$$

$$= sen\,\alpha \times sen\,\alpha + \cos^2\alpha = sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

FFT

■

<u>Dificuldades:</u>

O aluno poderá ter dificuldades em:

- Conseguir começar a demonstração;
- Perceber qual é a relação que envolve as três razões trigonométricas;
- Operar frações, nomeadamente com o seu produto;
- Mobilizar a Fórmula Fundamental da Trigonometria.

<u>Apoio a eventuais dificuldades:</u>

A professora deverá relembrar aos alunos que como se trata de uma demonstração temos de provar que a igualdade estabelecia é válida, e que para isso, os alunos não poderão utilizá-la durante a demonstração, terão de a deduzir.

A professora poderá perguntar:

- "Qual é a relação entre as razões trigonométricas que envolve a tangente?"; "Então, onde está a tangente, posso escrever o quociente entre o seno e o cosseno do mesmo ângulo, certo?";
- "Como posso fazer o produto de um fator pelo outro, sendo que um deles é uma fração?"
- "$sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$?"; "Porquê?"; "Que relação permite concluir isto?".

ATIVIDADES COMPLEMENTARES:

Uma vez que os alunos têm ritmos de trabalho diferentes, e para permitir estes usem o tempo de aula de forma útil, será sugerido, aos alunos que tenham concluído o trabalho proposto que realizem os exercícios do manual e/ou do caderno de atividades que ainda não tenham realizado.

AVALIAÇÃO:

A avaliação incidirá nas dinâmicas de pares e no trabalho produzido pelos mesmos, bem como a respetiva participação nas sucessivas discussões. Ir-se-á avaliar o empenho dos alunos, o seu trabalho em aula e as principais dificuldades sentidas. Utilizar-se-ão as tabelas de participação e idas ao quadro, utilizadas regularmente nas aulas.

Plano de aula

Professora: Anabela Candeias
Professoras-estagiárias: Débora Ferrage e Joana Dias

Data: 23/04/2019 Ano: 9.º Turma: B e C Duração: 45 minutos

LIÇÃO N.º: -

ALUNOS EM FALTA: -

SUMÁRIO:

– Determinar distância a locais inacessíveis: trabalho de grupo.

CONTEÚDOS MATEMÁTICOS: Razões trigonométricas e relações daí decorrentes.

DOMÍNIO: Geometria e Medida 9 (GM 9).

SUBDOMÍNIO: Trigonometria

METODOLOGIA DA AULA: Trabalho autónomo em grupos.

OBJETIVOS DA AULA: Consolidação dos conteúdos lecionados.

CONHECIMENTOS PRÉVIOS: Razões trigonométricas.

CAPACIDADES TRANSVERSAIS:

- Desenvolver a comunicação matemática dos alunos, sendo a comunicação escrita potenciada pelas resoluções que estes apresentam das tarefas propostas e a comunicação oral estimulada através da dinâmica do grupo onde estão inseridos;
- Desenvolver a capacidade de resolução de problemas dado que irão contactar com um problema em contextos de realidade, tendo de delinear uma estratégia eficiente para a sua resolução e saber dar a resposta de acordo com o contexto em questão;
- Desenvolver o raciocínio matemático uma vez que terão de ser capazes de justificar estratégias escolhidas e soluções apresentadas.

RECURSOS:

- Da professora: quadrantes, fitas métricas, máquina fotográfica, folhas de registo.
- Do aluno: calculadora científica.

MOMENTOS DA AULA:

3. Registo do sumário e faltas. (5 minutos)
4. Saída para a rua para tirar as medidas necessárias. (20 minutos)
5. Regresso à sala para calcular a altura dos edifícios. (25 minutos)

DESENVOLVIMENTO DA AULA:

1. Registo do sumário e faltas. **5 minutos**

Neste momento, para além da professora registar o sumário e faltas, pedirá que os alunos formem grupos de 4 e 5 elementos (conforme a constituição da turma e dos elementos presentes). Antes de saírem para a rua, a professora explicará a atividade que se irá realizar, distribuindo uma folha onde os alunos possam registar as medições necessárias para que a determinação das alturas dos edifícios/monumentos seja bem-sucedida.

2. Saída para a rua para tirar as medidas necessárias. **20 minutos**

Depois dos grupos formados, as três professoras (a professora titular das turma e as professoras-estagiárias) sairão com os grupos para a rua. Cada professora ficará com um edifício/monumento do Colégio, e cada grupo de alunos irá para um edifício/monumento diferente.

A professora começará por explicar que o instrumento que lhes permitiria calcular o ângulo será o quadrante, fazendo uma breve explicação aos alunos sobre este instrumento e como deve ser feita a sua utilização. Para ajudar na realização da tarefa, a professora pedirá que os alunos observem o desenho que têm na sua folha de registo. A professora pedirá que um dos alunos se voluntarie para medir a amplitude do ângulo em questão, e que outro aluno observe que amplitude é essa.

Depois de os alunos registarem a amplitude do ângulo, a professora questionará acerca dos elementos que lhes faltam para conseguirem determinar a altura do edifício/monumento. Logo, os alunos deverão compreender que devem medir a distância até ao edifício/monumento, desde o ponto onde o aluno que segurou o quadrante para medir o ângulo. Por questões ligadas ao material disponível, nem todos os grupos poderão fazer esta medição utilizando fitas métricas, assim sendo, alguns grupos efetuarão esta medição através da quantidade de pés, ou seja, os alunos contabilizaram o número de pés desde o ponto onde mediram o ângulo até ao edifício/monumento, e posteriormente, será feita a sua conversão para metros.

A professora deverá tirar uma fotografia onde consiga enquadrar o aluno que segura no quadrante com o edifício, de forma a formar um triângulo, para que os alunos, no seu relatório, consigam reproduzir uma situação semelhante a que vêm ilustrada na folha de registo.

Assim que todos os elementos necessários para a medição do edifício/monumento sejam recolhidos, a turma retornará para a sala de aula, onde se seguirá a segunda parte deste trabalho.

3. Regresso à sala para calcular a altura dos edifícios 25 minutos

Já na sala de aula, com o auxílio da figura que acompanha a folha de registo e da calculadora científica, os alunos deverão atribuir valores aos diferentes comprimentos registados, e através do cálculo trigonométrico, obter a altura do edifício. Também na sala de aula medir-se-ão os alunos que utilizaram o quadrante para medir a amplitude do ângulo, pela altura dos olhos, e medir-se-ão os pés dos alunos que tinham determinado a distância até edifício/monumento, para que a conversão de pés para metros possa ser feita.

Ainda neste momento, será dado tempo para que os alunos possam fazer um relatório preliminar, onde expliquem todo o procedimento envolvido, e a razão pela qual optaram por determinada razão trigonométrica.

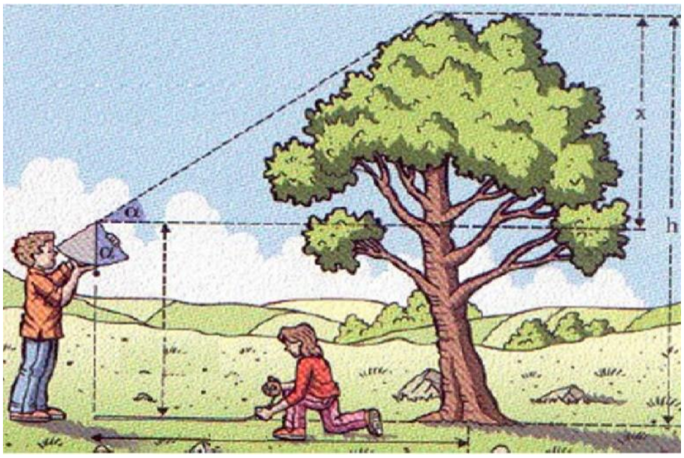
A professora deverá conferir os cálculos feitos. Posteriormente os alunos irão elaborar uma cartolina, onde colocarão os cálculos que realizaram, bem como o relatório e as fotografias disponibilizadas pela professora. Os trabalhos serão expostos num dos dias festivos do colégio: *Open Day*.

Anexo 35: Folha de registo para o trabalho de grupo

ANO LETIVO 2018/2019 Abril 2019	**COLÉGIO MILITAR** **Matemática- 9º Ano** **Folha de registo** **GRUPO:** ____________________ **N.º** ______________ **TURMA:**_____

Edifício/Monumento ________________________________

- Ângulo: ______
- **Altura ao nível do olho de quem fez a medição: _______**
- **Distância/n.º de pés ao objeto: ____________**
- **Altura calculada: _____________**



Anexo 36: Autorização para os Encarregados de Educação

LISBOA
UNIVERSIDADE DE LISBOA
Instituto de Educação

Estudar o uso de tarefas desafiantes e diferenciação pedagógica nas aulas de Matemática

Caro(a) Encarregado(a) de Educação,

A turma do seu educando foi selecionada para participar no EDUCATE, um projeto de investigação europeu do ERASMUS+ conduzido por uma equipa de investigadores de Portugal, Chipre, Grécia e Irlanda, que pretende estudar como o uso de tarefas matemáticas desafiantes no ensino da Matemática pode promover a aprendizagem de todos os alunos. Esta investigação é importante uma vez que, com base nos seus resultados, serão produzidos materiais para a formação de professores que podem ser usados por muitos professores e futuros professores em toda a União Europeia. A participação do seu educando nesta investigação é voluntária e requer o seu consentimento.

O que está envolvido na participação do meu educando nesta investigação?

A professora de Matemática do seu educando, Anabela Candeias, juntamente com as duas mestrandas do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa que estão a realizar a sua prática de ensino supervisionada no Colégio (Débora Ferrage e Joana Dias) irão gravar em vídeo algumas aulas nas próximas semanas. Embora o foco da observação recaia sobre as professoras em formação, o seu educando poderá também ser, ocasionalmente, captado na gravação dessas aulas.

Como é que os dados pessoais do meu educando serão salvaguardados?

A identidade pessoal do seu educando permanecerá totalmente confidencial. Alguns pequenos excertos de vídeo das aulas serão visionados num contexto restrito com os professores em formação e os formadores, com a intenção de apoiar a reflexão dos formandos sobre a prática de ensino da Matemática.

A participação do meu educando nesta investigação é obrigatória?

A participação do seu educando nesta investigação é voluntária. Para indicar se dá o seu consentimento à participação do seu educando, por favor, preencha o formulário de resposta, em anexo, e devolva-o à professora de Matemática. Note-se que os alunos que não desejem participar na investigação serão colocados fora do alcance da câmara quando as aulas de Matemática estiverem a ser gravadas.

Muito apreciaríamos a sua resposta positiva, uma vez que consideramos que este estudo pode contribuir para compreender como os professores podem ensinar Matemática de uma forma adequada a todos os alunos e promotora de uma aprendizagem de qualidade. Consequentemente, acreditamos que a concretização da investigação e as sugestões e os materiais curriculares daí decorrentes, poderão contribuir para a qualidade do ensino da

Matemática no nosso país, assim como promover as aprendizagens de todos os alunos nesta disciplina. O seu educando também será informado e solicitado a aceitar em participar do estudo.

Como poderei saber mais acerca desta investigação?

Para mais informação sobre a participação do seu educando nesta investigação, por favor, contacte o coordenador nacional do projeto:

Prof. Dr. João Pedro da Ponte

Instituto de Educação da Universidade de Lisboa

Alameda da Universidade

1649-013 Lisboa

Tel.: 21 794 37 77 Email: jpponte@ie.ulisboa.pt

Para alguma reclamação sobre esta investigação ou se pretender em qualquer momento anular o presente consentimento, entre em contato com o Prof. Dr. João Pedro da Ponte (detalhes de contacto acima).

Nota importante

Este projeto, intitulado "Melhorar o ensino diferenciado e a ativação cognitiva em aulas de matemática através da formação de professores (EDUCATE)" foi financiado com o apoio da Comissão Europeia.

Consentimento do(a) Encarregado(a) de Educação

Declaro que li e compreendi a descrição do projeto de investigação EDUCATE. Estou informado que a participação do meu educando é voluntária e autorizo a sua participação no projeto de investigação no ano letivo de 2018-2019. Tomei conhecimento que o nome do meu educando não irá aparecer em nenhuma publicação e que os dados registados em vídeo irão ser mantidos num arquivo seguro e serão usados apenas para propósitos da investigação e na formação de professores.

Finalmente, compreendo que, se tiver alguma questão sobre a investigação, poderei contactar o Prof. Dr. João Pedro da Ponte, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa. Se em algum momento eu tiver quaisquer comentários sobre o projeto ou questões sobre os direitos do meu educando como participante no estudo, posso entrar em contato com a pessoa acima mencionada. Para além disso, compreendo que posso retirar o meu educando do estudo, em qualquer momento e sem qualquer consequência. Para tal, deverei entrar em contato com o Prof. Dr. João Pedro da Ponte, do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.

Por favor, colocar um "X" na caixa abaixo; depois devolver esta página e manter as duas primeiras páginas para seu próprio registo:

- ☐ Dou o meu consentimento para o meu educando ser gravado em vídeo em algumas aulas de matemática e para o vídeo poder ser usado para investigação e na formação de professores no âmbito do projeto EDUCATE.
- ☐ Não dou o meu consentimento para o meu educando ser gravado no âmbito do projeto EDUCATE.

Nome do aluno: ____

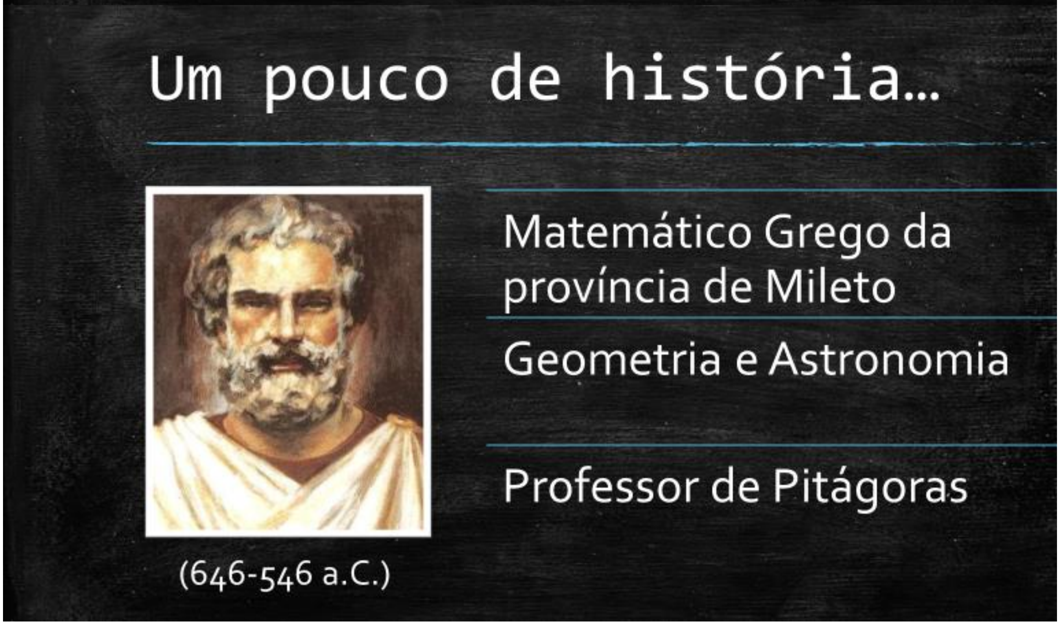
Nome do Encarregado de Educação: ____

Assinatura do Encarregado de Educação: ____

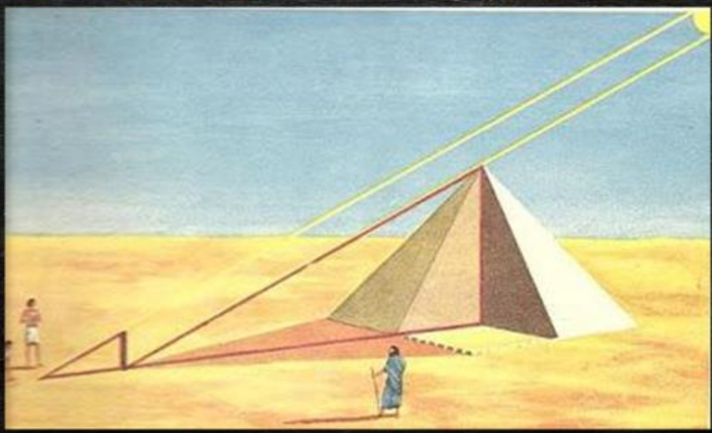
Data: ________________________Escola: ____

Nome do(a) Professor(a): ____

Anexo 37: Apresentação da aula do dia 14 de fevereiro de 2019



Tales e as pirâmides



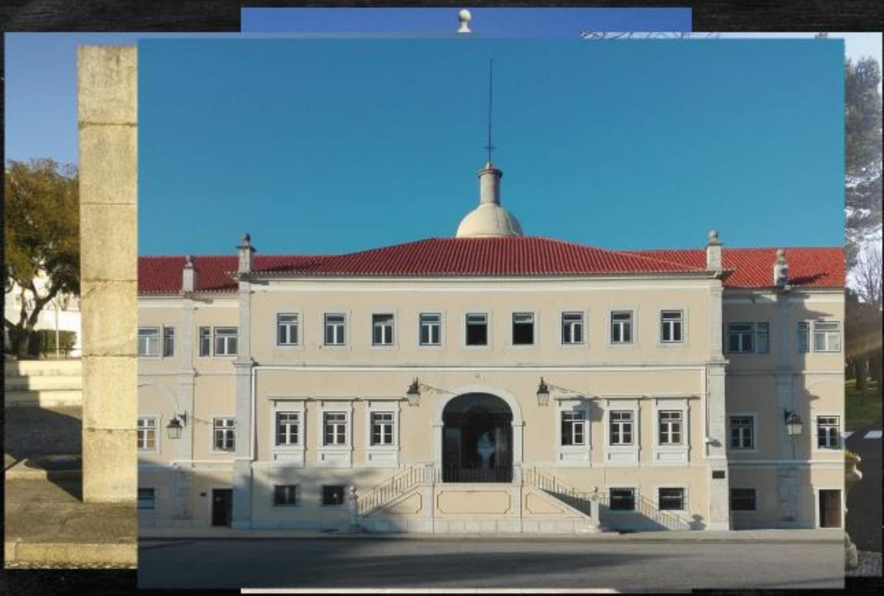
Discussão

- Quanto acham que mede a pirâmide?
- Que conhecimentos terá Tales utilizado para resolver este problema?

Trabalho autónomo

Resolução da ficha 10

Razões trigonométricas



Trabalho autónomo

Resolução da ficha 11

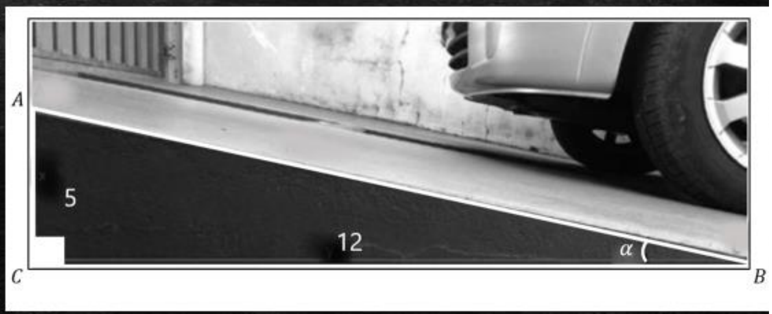
Resolução da ficha 11

a)

i. $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{5}{13}$;

ii. $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{12}{13}$;

iii. $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{5}{12}$.



Resolução da ficha 11

b)

i. Cateto oposto ao ângulo α;

ii. Cateto adjacente ao ângulo α;

iii. Hipotenusa.

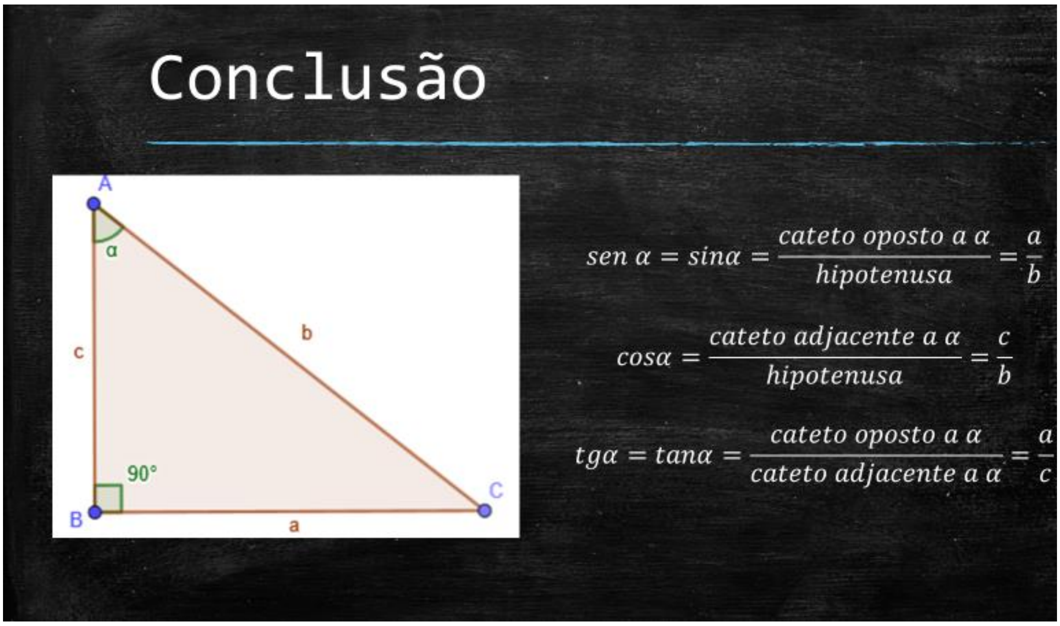
Resolução da ficha 11

c)

i. $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\text{medida do comprimento do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \text{seno } \alpha$

ii. $\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\text{medida do comprimento do cateto adjacente ao ângulo } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \text{cosseno}$

iii. $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\text{medida do comprimento do cateto oposto ao ângulo } \alpha}{\text{medida do comprimento do cateto adjacente ao ângulo } \alpha} = \text{tangente}$



Anexo 38: Apresentação da aula do dia 28 de fevereiro de 2019

$$tg\,45° = 1$$

Sin

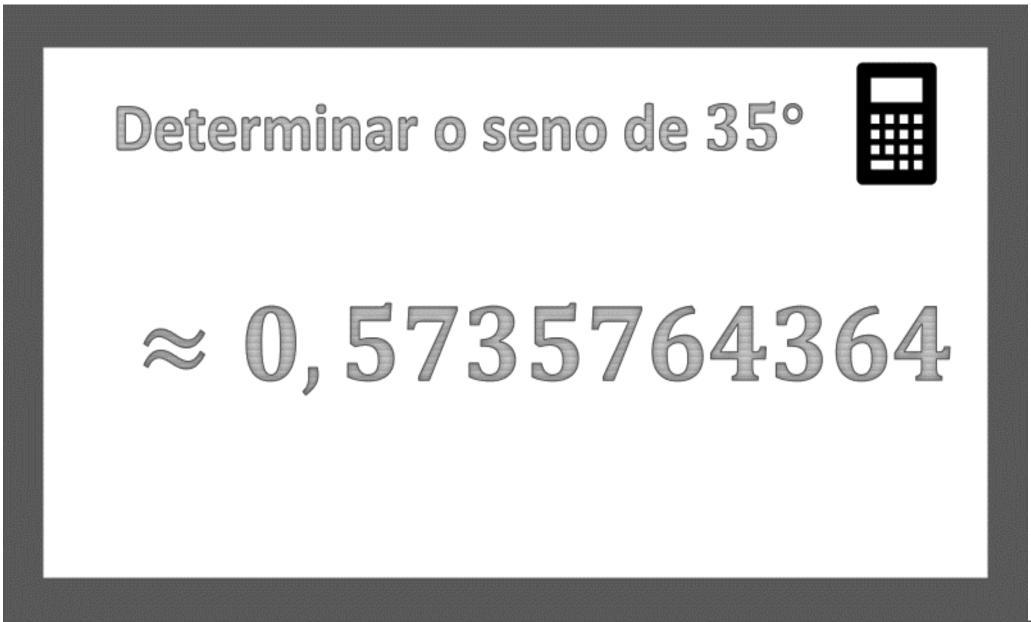
Sen

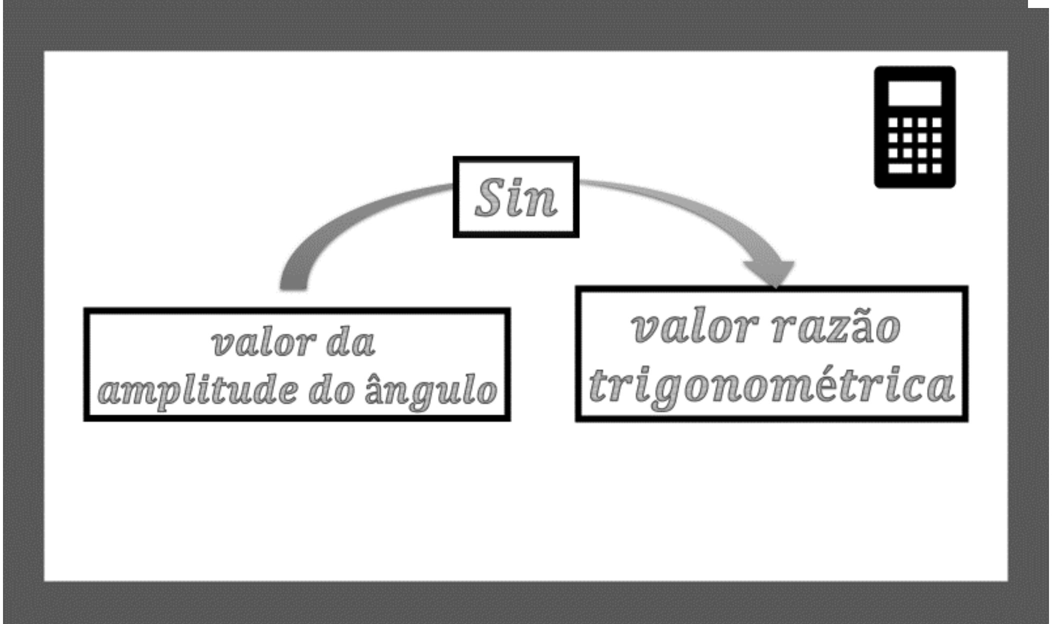
Determinar o seno de 35°

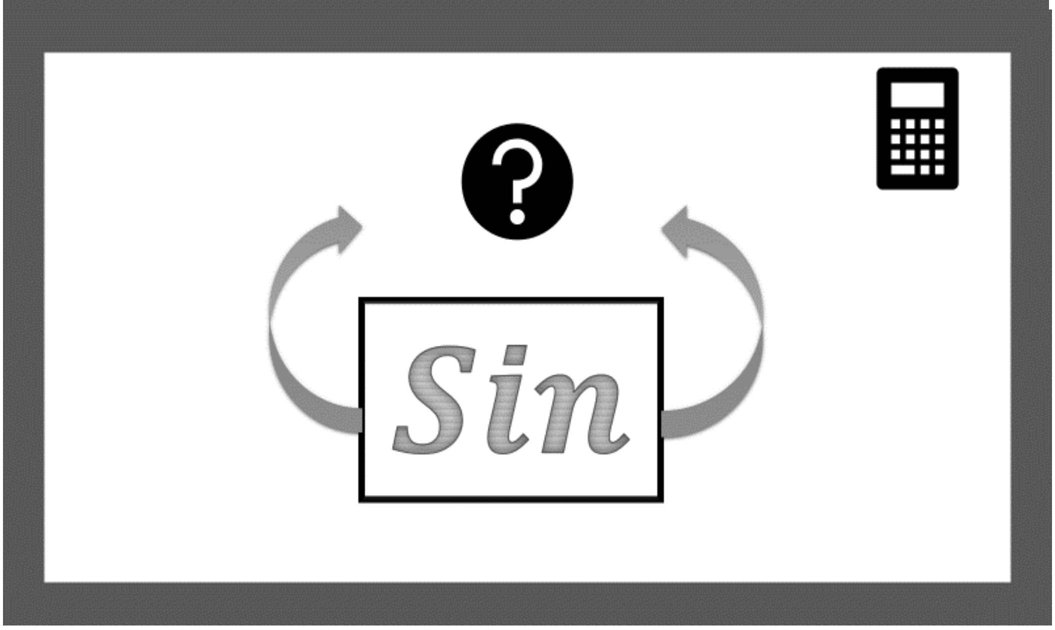
Sin

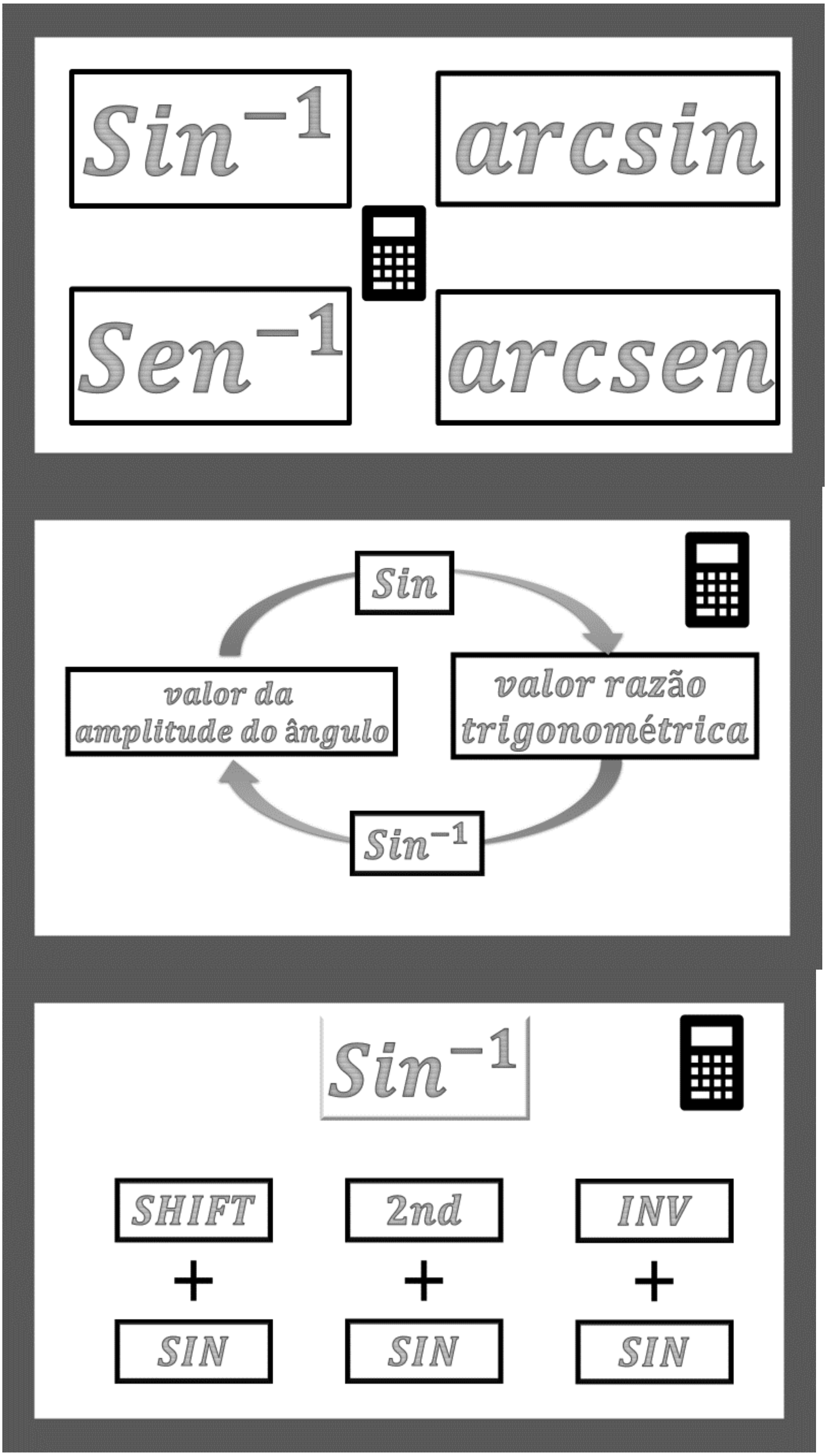
3

5


Determinar o seno de 35°
≈ 0,5735764364


Sin
valor da amplitude do ângulo
valor razão trigonométrica


Sin

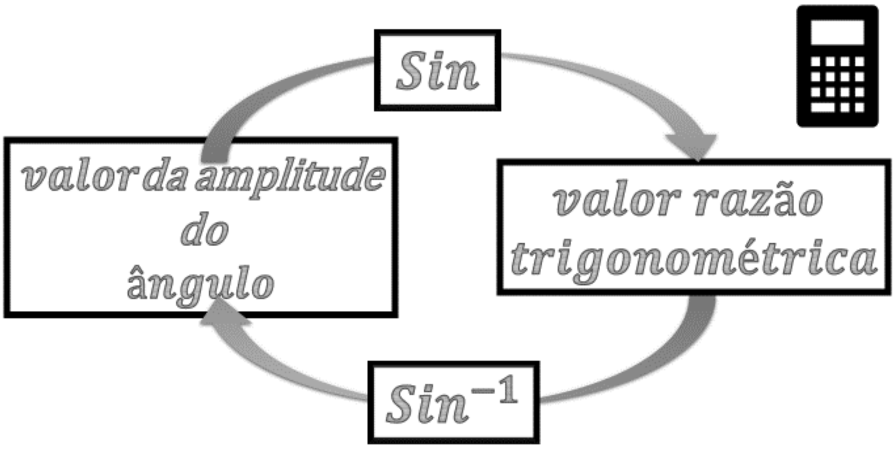

Sin^{-1}
arcsin
Sen^{-1}
arcsen
Sin
valor da amplitude do ângulo
valor razão trigonométrica
Sin^{-1}
Sin^{-1}
SHIFT + SIN
2nd + SIN
INV + SIN

Determinar o ângulo cujo seno é 0,7

$$\boxed{Sin^{-1}}\left(\boxed{0}\,\boxed{,}\,\boxed{7}\right)$$

Determinar o a amplitude do ângulo cujo seno é 0,7

$$\approx 44,427004$$



Página 48 do manual

Atividade 8

Tabela

Tabela Trigonométrica

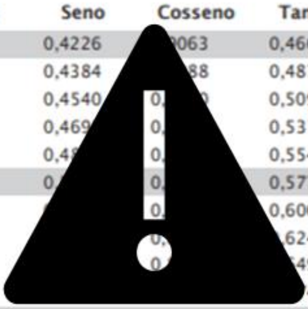
Graus	Seno	Cosseno	Tangente	Graus	Seno	Cosseno	Tangente
1	0,0175	0,9998	0,0175	46	0,7193	0,6947	1,0355
2	0,0349	0,9994	0,0349	47	0,7314	0,6820	1,0724
3	0,0523	0,9986	0,0524	48	0,7431	0,6691	1,1106
4	0,0698	0,9976	0,0699	49	0,7547	0,6561	1,1504
5	0,0872	0,9962	0,0875	50	0,7660	0,6428	1,1918
6	0,1045	0,9945	0,1051	51	0,7771	0,6293	1,2349
7	0,1219	0,9925	0,1228	52	0,7880	0,6157	1,2799
8	0,1392	0,9903	0,1405	53	0,7986	0,6018	1,3270
9	0,1564	0,9877	0,1584	54	0,8090	0,5878	1,3764
10	0,1736	0,9848	0,1763	55	0,8192	0,5736	1,4281
11	0,1908	0,9816	0,1944	56	0,8290	0,5592	1,4826
12	0,2079	0,9781	0,2126	57	0,8387	0,5446	1,5399
13	0,2250	0,9744	0,2309	58	0,8480	0,5299	1,6003
14	0,2419	0,9703	0,2493	59	0,8572	0,5150	1,6643
15	0,2588	0,9659	0,2679	60	0,8660	0,5000	1,7321
16	0,2756	0,9613	0,2867	61	0,8746	0,4848	1,8040
17	0,2924	0,9563	0,3057	62	0,8829	0,4695	1,8807
18	0,3090	0,9511	0,3249	63	0,8910	0,4540	1,9626
19	0,3256	0,9455	0,3443	64	0,8988	0,4384	2,0503
20	0,3420	0,9397	0,3640	65	0,9063	0,4226	2,1445
21	0,3584	0,9336	0,3839	66	0,9135	0,4067	2,2460
22	0,3746	0,9272	0,4040	67	0,9205	0,3907	2,3559
23	0,3907	0,9205	0,4245	68	0,9272	0,3746	2,4751
24	0,4067	0,9135	0,4452	69	0,9336	0,3584	2,6051
25	0,4226	0,9063	0,4663	70	0,9397	0,3420	2,7475
26	0,4384	0,8988	0,4877	71	0,9455	0,3256	2,9042
27	0,4540	0,8910	0,5095	72	0,9511	0,3090	3,0777
28	0,4695	0,8829	0,5317	73	0,9563	0,2924	3,2709
29	0,4848	0,8746	0,5543	74	0,9613	0,2756	3,4874
30	0,5000	0,8660	0,5774	75	0,9659	0,2588	3,7321
31	0,5150	0,8572	0,6009	76	0,9703	0,2419	4,0108
32	0,5299	0,8480	0,6249	77	0,9744	0,2250	4,3315
33	0,5446	0,8387	0,6494	78	0,9781	0,2079	4,7046
34	0,5592	0,8290	0,6745	79	0,9816	0,1908	5,1446
35	0,5736	0,8192	0,7002	80	0,9848	0,1736	5,6713
36	0,5878	0,8090	0,7265	81	0,9877	0,1564	6,3138
37	0,6018	0,7986	0,7536	82	0,9903	0,1392	7,1154
38	0,6157	0,7880	0,7813	83	0,9925	0,1219	8,1443
39	0,6293	0,7771	0,8098	84	0,9945	0,1045	9,5144
40	0,6428	0,7660	0,8391	85	0,9962	0,0872	11,4301
41	0,6561	0,7547	0,8693	86	0,9976	0,0698	14,3007
42	0,6691	0,7431	0,9004	87	0,9986	0,0523	19,0811
43	0,6820	0,7314	0,9325	88	0,9994	0,0349	28,6363
44	0,6947	0,7193	0,9657	89	0,9998	0,0175	57,2900
45	0,7071	0,7071	1,0000				

Determinar o valor do seno de um ângulo de amplitude 35°

Graus	Seno	Cosseno	Tangente
25	0,4226	0,9063	0,4663
26	0,4384	0,8988	0,4877
27	0,4540	0,8910	0,5095
28	0,4695	0,8829	0,5317
29	0,4848	0,8746	0,5543
30	0,5000	0,8660	0,5774
31	0,5150	0,8572	0,6009
32	0,5299	0,8480	0,6249
33	0,5446	0,8387	0,6494
34	0,5592	0,8290	0,6745
35	0,5736	0,8192	0,7002
36	0,5878	0,8090	0,7265
37	0,6018	0,7986	0,7536

Determinar o valor do seno de um ângulo de amplitude 27, 3°

Graus	Seno	Cosseno	Tangente
25	0,4226	[illegible]	0,4663
26	0,4384	[illegible]	0,4877
27	0,4540	[illegible]	0,5095
28	[illegible]	[illegible]	0,5317
29	[illegible]	[illegible]	0,5543
30	[illegible]	[illegible]	0,5774
31	[illegible]	[illegible]	0,6009
32	[illegible]	[illegible]	[illegible]
33	[illegible]	[illegible]	[illegible]
34	[illegible]	[illegible]	[illegible]
35	0,5736	0,8192	0,7002
36	0,5878	0,8090	0,7265
37	0,6018	0,7986	0,7536

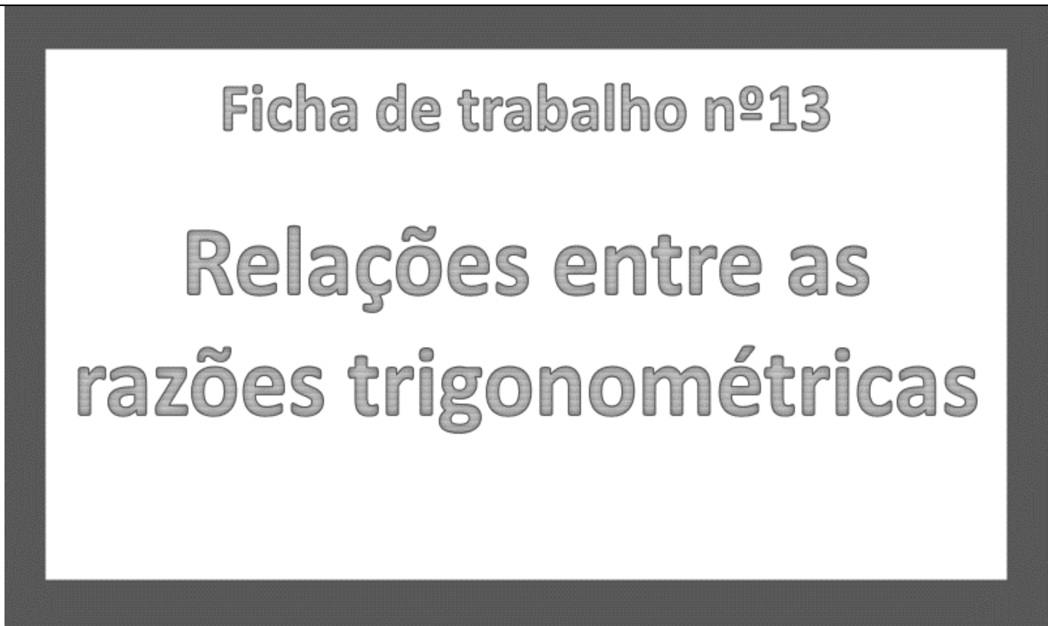


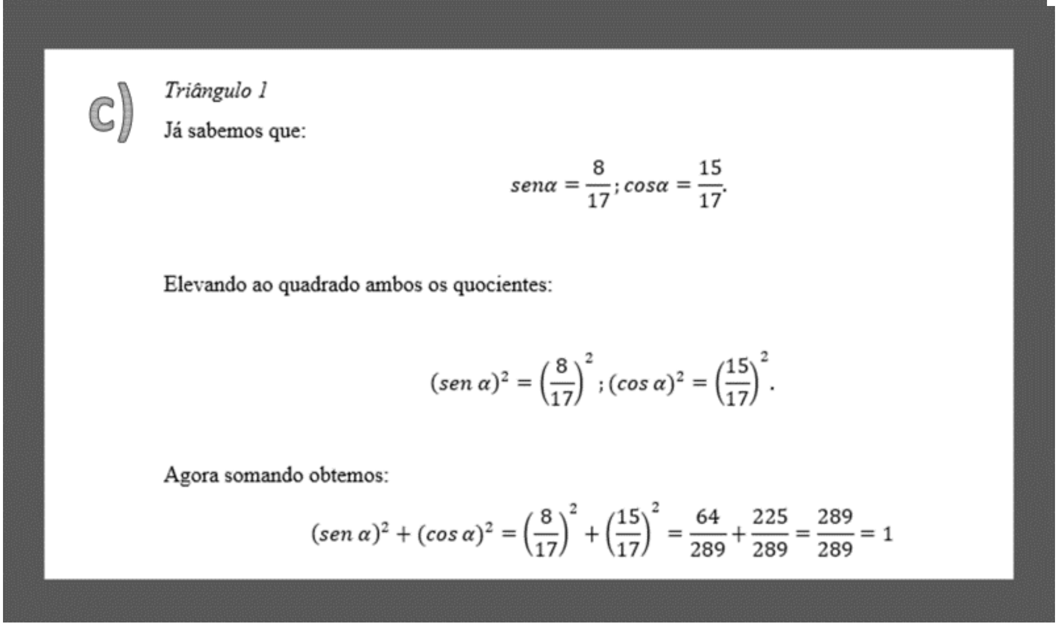
A tabela apenas pode ser utilizada se a amplitude do ângulo for um número natural entre 1 e 89.

Determinar o ângulo cujo cosseno é aproximadamente 0, 88.

Graus	Seno	Cosseno	Tangente
25	0,4226	0,9063	0,4663
26	0,4384	0,8988	0,4877
27	0,4540	0,8910	0,5095
28	0,4695	0,8829	0,5317
29	0,4848	0,8746	0,5543
30	0,5000	0,8660	0,5774
31	0,5150	0,8572	0,6009
32	0,5299	0,8480	0,6249
33	0,5446	0,8387	0,6494
34	0,5592	0,8290	0,6745
35	0,5736	0,8192	0,7002
36	0,5878	0,8090	0,7265
37	0,6018	0,7986	0,7536

Anexo 39: Apresentação da aula do dia 12 de março de 2019





c) *Triângulo 1*

Já sabemos que:

$$sen\alpha = \frac{8}{17}; cos\alpha = \frac{15}{17}.$$

Elevando ao quadrado ambos os quocientes:

$$(sen\ \alpha)^2 = \left(\frac{8}{17}\right)^2; (cos\ \alpha)^2 = \left(\frac{15}{17}\right)^2.$$

Agora somando obtemos:

$$(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = \left(\frac{8}{17}\right)^2 + \left(\frac{15}{17}\right)^2 = \frac{64}{289} + \frac{225}{289} = \frac{289}{289} = 1$$

c) *Triângulo 2*

Já sabemos que:

$$sen\ \beta = \frac{12}{13}; cos\ \beta = \frac{5}{13}.$$

Elevando ao quadrado ambos os quocientes:

$$(sen\ \beta)^2 = \left(\frac{12}{13}\right)^2; (cos\ \ \beta)^2 = \left(\frac{5}{13}\right)^2.$$

Agora somando obtemos:

$$(sen\ \beta)^2 + (cos\ \beta)^2 = \left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{144}{169} + \frac{25}{169} = \frac{169}{169} = 1$$

c) *Triângulo 3*

Já sabemos que:

$$sen\ \gamma = \frac{3}{5}; cos\ \gamma = \frac{4}{5}.$$

Elevando ao quadrado ambos os quocientes:

$$(sen\ \gamma)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2; (cos\ \ \gamma)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2.$$

Agora somando obtemos:

$$(sen\ \gamma)^2 + (cos\ \ \gamma)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{25}{25} = 1$$

- $(sen\ \alpha)^2 + (cos\ \alpha)^2 = 1$
- $(sen\ \beta)^2 + (cos\ \beta)^2 = 1$
- $(sen\ \gamma)^2 + (cos\ \ \gamma)^2 = 1$

Escrita simplificada

$sen^2 \alpha$ é uma maneira simplificada de escrever $(sen\ \alpha)^2$.

De modo análogo:

$$\cos^2 \alpha = (\cos \alpha)^2$$

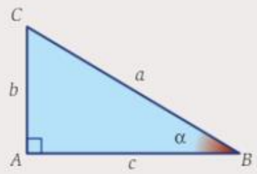
$$tg^2 \alpha = (tg\ \alpha)^2$$

Atividade 29, página 55 do manual

29 Atividade **Demonstrar**

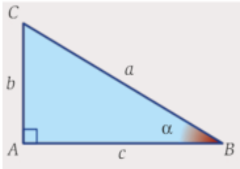
O triângulo $[ABC]$ representa um triângulo retângulo em A.

- α designa um dos seus ângulos agudos.
- a, b e c representam as medidas dos lados.



a) Copia e completa a demonstração de que qualquer que seja o ângulo agudo α considerado se tem sempre: $sen^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

$sen\ \alpha = \dfrac{b}{a}$; $\cos \alpha = \dfrac{c}{a}$ Por definição de seno e de cosseno de um ângulo agudo.



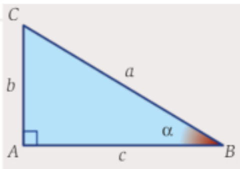
$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{b}{a}$; $\cos\alpha = \dfrac{c}{a}$ Por definição de seno e de cosseno de um ângulo agudo.

$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}$$

Substituindo $\text{sen}\,\alpha$ e $\cos\alpha$ pelas expressões já escritas.

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{b}{a}$; $\cos\alpha = \dfrac{c}{a}$ Por definição de seno e de cosseno de um ângulo agudo.

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = \dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{c^2}{a^2}$ Substituindo $\text{sen}\,\alpha$ e $\cos\alpha$ pelas expressões já escritas.



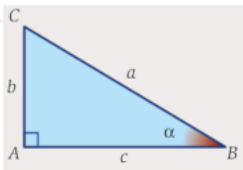
$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$$

Adicionando as duas frações.

$\text{sen}\,\alpha = \dfrac{b}{a}$; $\cos\alpha = \dfrac{c}{a}$ Por definição de seno e de cosseno de um ângulo agudo.

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = \dfrac{b^2}{a^2} + \dfrac{c^2}{a^2}$ Substituindo $\text{sen}\,\alpha$ e $\cos\alpha$ pelas expressões já escritas.

$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = \dfrac{b^2 + c^2}{a^2}$ Adicionando as duas frações.

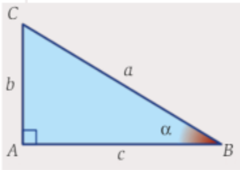


$$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{a^2}$$

Aplicando o teorema de Pitágoras.

$\text{sen}\,\alpha = \frac{b}{a}$; $\cos\alpha = \frac{c}{a}$ Por definição de seno e de cosseno de um ângulo agudo.

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2}$ Substituindo $\text{sen}\,\alpha$ e $\cos\alpha$ pelas expressões já escritas.



$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{b^2 + c^2}{a^2}$ Adicionando as duas frações.

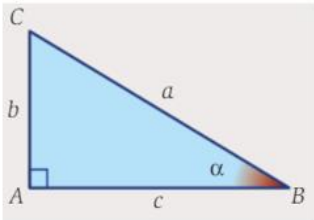
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{a^2}{a^2}$ Aplicando o teorema de Pitágoras.

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ Como queríamos provar.

b) Prova, aplicando a definição das razões trigonométricas, que qualquer que seja o ângulo agudo α considerado se tem sempre: $\frac{\text{sen}\,\alpha}{\cos\alpha} = \text{tg}\,\alpha$.

$$sen\,\alpha = \frac{b}{a} \qquad cos\,\alpha = \frac{c}{a} \qquad tg\,\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\frac{sen\,\alpha}{cos\alpha} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = \frac{b}{a} \times \frac{a}{c} = \frac{b}{c} = tg\,\alpha \quad \blacksquare$$



Sistematização

Relações entre as razões trigonométricas de um ângulo agudo α

Conhecida apenas uma das razões trigonométricas é possível determinar o valor das restantes.

- Relação entre o seno e o cosseno:

$$\boxed{sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1}$$

Fórmula Fundamental da Trigonometria (FFT)

- Relação entre o seno, cosseno e tangente:

$$\boxed{tg\alpha = \frac{sen\,\alpha}{cos\,\alpha}}$$

Como calcular os valores exatos de $cos\ \alpha$ e de $tg\ \alpha$ sabendo que α é um ângulo agudo e $sen\ \alpha = \frac{5}{6}$?

$\boxed{cos\ \alpha}$

$$sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^2 + cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow cos^2\alpha = 1 - \frac{25}{36} \Leftrightarrow cos^2\alpha = 1 - \frac{25}{36} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow cos^2\alpha = \frac{11}{36} \Leftrightarrow cos\ \alpha = \sqrt{\frac{11}{36}} \vee \cos\alpha = -\sqrt{\frac{11}{36}}$$

$$\Leftrightarrow cos\ \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6} \vee \cos\alpha = -\frac{\sqrt{11}}{6}$$

Como α é um ângulo agudo, $cos\ \alpha$ é positivo, logo $cos\ \alpha = \frac{\sqrt{11}}{6}$

$tg\ \alpha$

$$tg\ \alpha = \frac{sen\ \alpha}{cos\ \alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow tg\ \alpha = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{\sqrt{11}}{6}} = \frac{5}{6} \times \frac{6}{\sqrt{11}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

$$tg\ \alpha = \frac{5}{\sqrt{11}} = \frac{5 \times \sqrt{11}}{\sqrt{11} \times \sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{11}}{11}$$

Racionalizar o denominador

Sabendo que α é um ângulo agudo e $sen\ \alpha = \frac{2}{3}$ como calcular aproximadamente $cos\ \alpha$ e de $tg\ \alpha$, determinando previamente uma aproximação da amplitude de α?

α é um ângulo agudo e $sen\ \alpha = \frac{2}{3}$

$$\alpha \approx \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\alpha \approx 41{,}810° \approx 42°$$

$cos\ \alpha \approx \cos 42° \approx 0{,}743$ $\qquad$ $tg\ \alpha \approx tg\ 42° \approx 0{,}900$

Anexo 40: Apresentação da aula do dia 14 de março de 2019

Sabendo que α é um ângulo agudo e $sen\ \alpha = \frac{2}{3}$ como calcular aproximadamente $cos\ \alpha$ e de $tg\ \alpha$, determinando previamente uma aproximação de α?

α é um ângulo agudo e $sen\ \alpha = \frac{2}{3}$

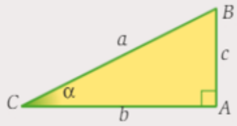
$$\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\alpha \approx 41{,}810° \approx 42°$$

$cos\ \alpha \approx \cos 42° \approx 0{,}743$ $\quad$ $tg\ \alpha \approx tg\ 42° \approx 0{,}900$

Relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares

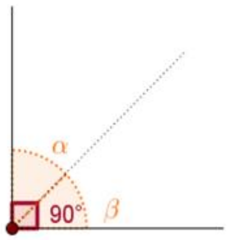
44 Atividade **À descoberta da relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares**

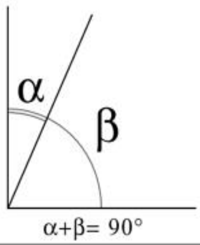


Na figura, está representado um triângulo $[ABC]$ retângulo em A. Designa:

- a amplitude do ângulo ACB por α.
- as medidas dos lados do triângulo por a, b e c, como sugere a figura.

44.1 Justifica que os ângulos B e C são complementares.





Recorda

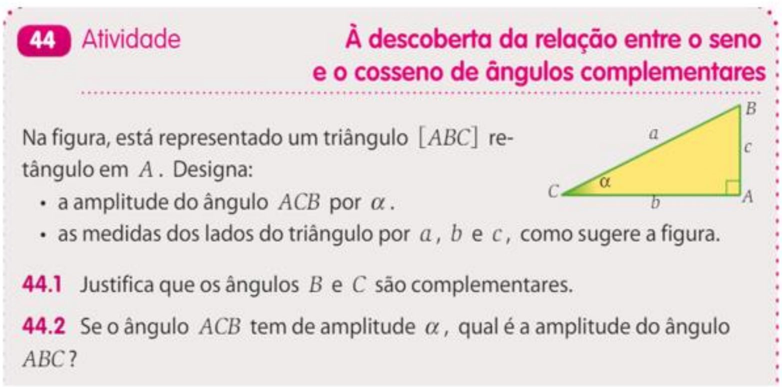
O $\measuredangle AOB$ é **complementar do** $\measuredangle BOC$ se a soma dos dois ângulos for um ângulo reto.

$A\hat{O}B + B\hat{O}C = 90°$

A soma das amplitudes de dois ângulos complementares é $90°$.

44.1)

O triângulo é retângulo, logo um dos ângulos, neste caso Â, tem como amplitude 90°. Dado que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°, $\hat{B} + \hat{C} = 90°$, portanto, os dois ângulos são complementares.



44 Atividade **À descoberta da relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares**

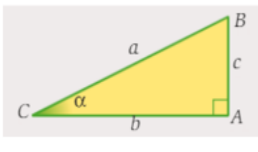
Na figura, está representado um triângulo $[ABC]$ retângulo em A. Designa:

- a amplitude do ângulo ACB por α.
- as medidas dos lados do triângulo por a, b e c, como sugere a figura.

44.1 Justifica que os ângulos B e C são complementares.

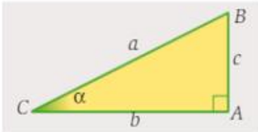
44.2 Se o ângulo ACB tem de amplitude α, qual é a amplitude do ângulo ABC?

44.2)



Uma vez que os dois ângulos são complementares, $\hat{B} + \hat{C} = 90°$.(1)

Se $\hat{C} = \alpha$, então, substituindo em (1) $\hat{B} + \alpha = 90°$, logo $\hat{B} = 90° - \alpha$.



44.3 Escreve as seguintes razões trigonométricas na forma de razões entre comprimentos dos lados do triângulo $[ABC]$.

$\text{sen}\,\alpha = \frac{c}{a}$

$\text{sen}\,(90° - \alpha) = \boldsymbol{sen\,\hat{B} = \frac{b}{a}}$

$\cos\alpha = \boldsymbol{\frac{b}{a}}$

$\cos(90° - \alpha) = \boldsymbol{cos\,\hat{B} = \frac{c}{a}}$

44.4 Observa os resultados obtidos na alínea anterior.

Que relação podes estabelecer entre os resultados obtidos para o seno e o cosseno de ângulos complementares?

$$\boldsymbol{cos\,\alpha = sen\,(90° - \alpha) = \frac{b}{a}}$$

Cosseno de um ângulo agudo é igual ao seno do ângulo complementar

$$\boldsymbol{sen\,\alpha = cos\,(90° - \alpha) = \frac{c}{a}}$$

Seno de um ângulo agudo é igual ao cosseno do ângulo complementar

Sistematização

Relação entre o seno e o cosseno de ângulos complementares

- O seno de um ângulo agudo de amplitude α é igual ao cosseno do seu ângulo complementar, isto é: $\boldsymbol{sen\ \alpha = cos\ (90° - \alpha)}$

- O cosseno de um ângulo agudo de amplitude α é igual ao seno do seu ângulo complementar, isto é: $\boldsymbol{cos\ \alpha = sen\ (90° - \alpha)}$

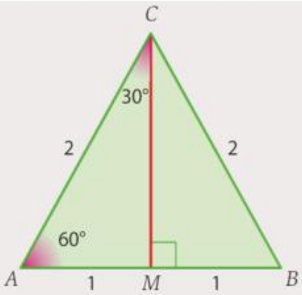
Atividade 46, página 60 do manual

46 Atividade **Calcular os valores exatos das razões trigonométricas de ângulos de $30°$ e $60°$**

Para calcular os valores exatos das razões trigonométricas de $30°$ e $60°$, basta obter um triângulo retângulo com ângulos agudos de $30°$ e $60°$ e conhecer as medidas dos seus lados.

Considera o triângulo equilátero $[ABC]$ e a altura $[CM]$ relativa a um dos lados, como sugere a figura.

Para facilitar os cálculos, considera que a medida do comprimento de cada lado é 2.



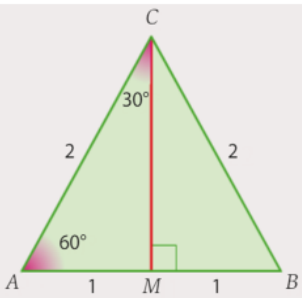
46.1 Justifica a afirmação:

A altura $[CM]$ divide o triângulo $[ABC]$ em dois triângulos retângulos com dois ângulos agudos de $30°$ e $60°$: $\triangle[AMC]$ e $\triangle[BMC]$.

46.1

- Por definição, a altura [CM] é perpendicular a [AB]. Assim o triângulo [AMC] é retângulo em M.
- Por outro lado, como o triângulo [ABC] é equilátero, todos os seus ângulos têm a mesma amplitude (60°) e, portanto, o ângulo em A tem amplitude 60°.

Como a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180°, tendo em conta os dois pontos anteriores, tem-se que o ângulo $A\hat{C}M$ tem amplitude 30° .



46.1 Justifica a afirmação:

A altura $[CM]$ divide o triângulo $[ABC]$ em dois triângulos retângulos com dois ângulos agudos de $30°$ e $60°$: $\triangle[AMC]$ e $\triangle[BMC]$.

46.2 Verifica que $\overline{CM} = \sqrt{3}$.

46.2

Como [AC] e [BC] têm o mesmo comprimento, sabemos que a altura [CM] divide o lado [AB] em dois segmentos com o mesmo comprimento. Como $\overline{AB} = 2$, temos que [AM] e [BM] têm comprimento 1.

46.2

Pelo Teorema de Pitágoras:

$$\overline{AM}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{AC}^2 \Leftrightarrow 1^2 + MC^2 = 2^2 \Leftrightarrow 3 = \overline{MC}^2 \Leftrightarrow$$

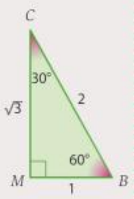
$$\Leftrightarrow \overline{MC} = \pm\sqrt{3} \Leftrightarrow \overline{MC} = \sqrt{3},$$

$$\overline{MC} > 0, \text{ porque } \overline{MC} \text{ é um comprimento.}$$

■

46.2 Verifica que $\overline{CM} = \sqrt{3}$.

46.3 Considerando as medidas do $\triangle[BMC]$, determina os valores exatos de:



a) $\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tg } 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} =$

$= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Multiplicaram-se ambos os termos da fração por $\sqrt{3}$, de modo a obter-se no denominador um número racional.

b) sen 60 °

c) cos 60 °

d) tg 60 °

46.3

b)

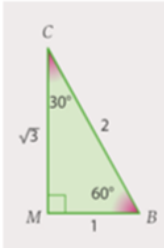
$$sen60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

c)

$$cos60° = \frac{1}{2}$$

d)

$$tg60° = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$



Sistematização

Valores exatos das razões trigonométricas de ângulos de referência

	30°	45°	60°
Seno	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
Cosseno	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
Tangente	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$